Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 1

Belanja Cerdas

MATEMATIKA
Paket C Setara Kelas X SMA/MA

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Matematika Paket C Tingkatan V Modul Tema 1
Modul Tema 1 : Belanja Cerdas

- Penulis: Rain Adhistya

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
  Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
  Kebudayaan, 2018

iv+ 40 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar iii
Daftar Isi iv
Petunjuk Penggunaan Modul 1
Tujuan Pembelajaran Modul 2
Pengantar Modul 2
UNIT 1 PERSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL DAN DUA VARIABEL SERTA PENERAPAN SEHARI-HARI 5
Kegiatan 1 8
Kegiatan 2 10
Kegiatan 3 13
Kegiatan 4 17
UNIT 2 SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL DAN NILAI MUTLAK 19
Kegiatan 1 24
A. Nilai Mutlak 25
Latihan 1 26
UNIT 3 PERTIDAKSAMAAN RASIONAL DAN IRASIONAL SATU VARIABEL 29
Penugasan 26
A. Sistem Persamaan Dua Variabel dari Bentuk Linear dan Kuadrat 32
Kegiatan 1 33
B. Sistem Persamaan Dua Variabel dari Bentuk Kuadrat-Kuadrat 35
Rangkuman 37
Kriteria Pindah Modul 39
Saran Referensi 40
Daftar Pustaka 40

BELANJA CERDAS

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel, pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel dan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat) dalam tema bagaimana berbelanja dengan cerdas maupun penerapan lainnya dalam kehidupan kita sehari-hari. Subtema cara memilih produk yang baik dikaitkan dengan konsep persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Konsep dasar ini sebagai pijakan untuk memahami konsep tentang pertidaksamaan linear satu variabel. Contoh-contoh dalam bentuk masalah kontekstual, disajikan dengan kata-kata yang sederhana, ringan dan mengalir sehingga mudah untuk dipahami.

Subtema membawa uang sesuai rencana belanja dikaitkan dengan konsep tentang pertidaksamaan linear satu variabel. Contoh-contoh atau peristiwa konstekstual yang dilakukan sehari-hari menjadi masalah yang asik untuk didiskusikan dan diselesaikan. Sedangkan subtema membandingkan harga dikaitkan materi strategi pemecahan masalah, yaitu mengidentifikasi masalah kontekstual, membuat model matematikanya serta menyelesaikannya sesuai dengan langkah-langkah penyelesaian. Materi pelajaran yang terkait adalah persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel, pertidaksamaan rasional dan irasional dan pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat).

Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.

Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

1. Memahami konsep persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel, pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel dan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat) dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel, pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel dan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat) serta penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan ekonomi dan maslah lainnya sehari-hari

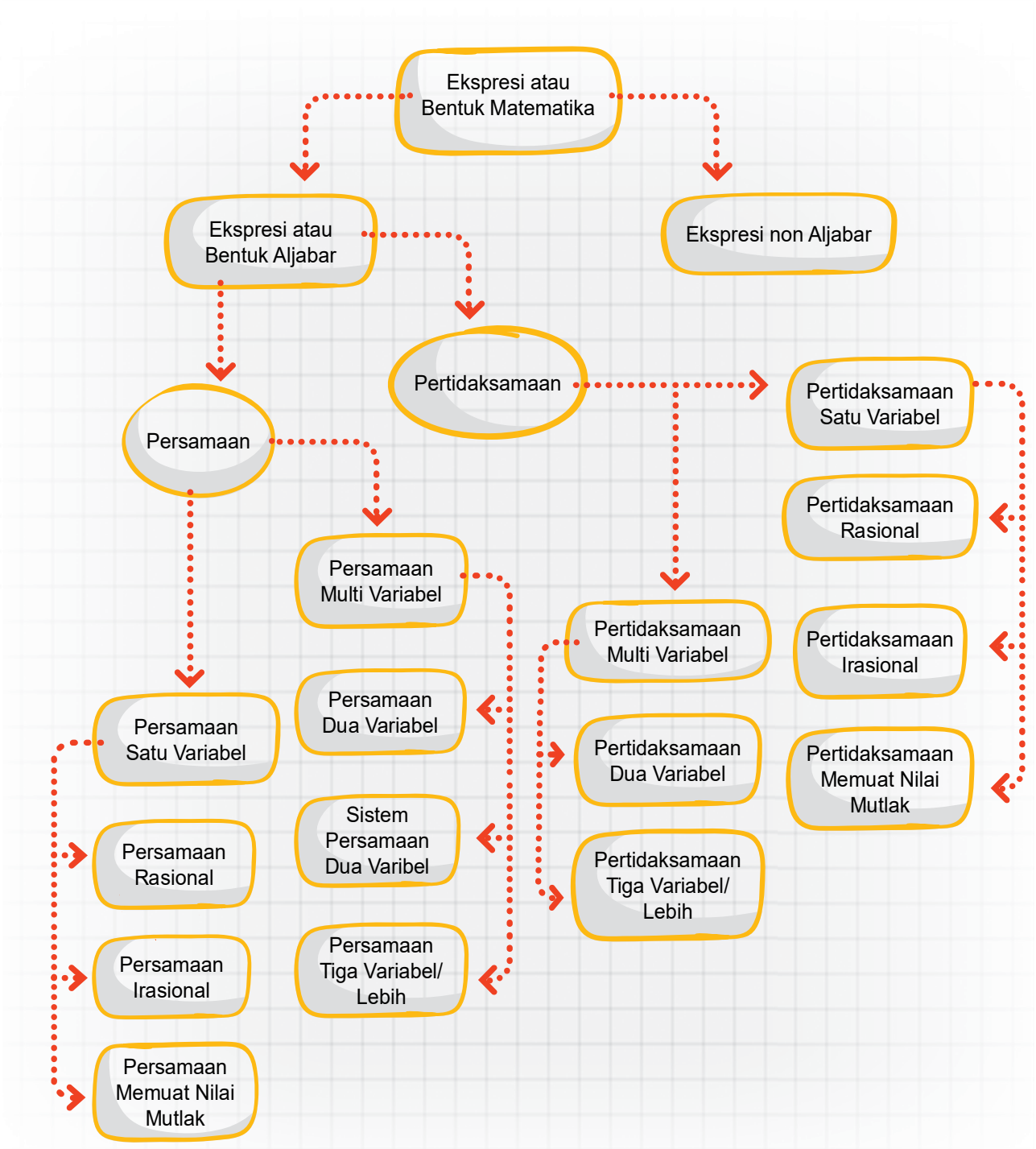
Pengantar Modul

Banyak kalimat, pernyataan, peristiwa atau situasi sehari-hari yang dapat dinyatakan dalam simbol atau bahasa yang sederhana, ringkas dan akurat agar lebih mudah dipahami sehingga perlu dikenalkan konsep ekspresi matematika, persamaan atau pertidaksamaan selain menggunakan bentuk tabel, diagram/ilustrasi, atau gambar. Pada modul ini akan dibahas ekspresi matematika terutama yang terkait dengan konsep dan penggunaan dari persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel, pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel dan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)

Pembahasan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel meliputi konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linear satu dan dua variabel dari masalah kontekstual, pengertian persamaan, jenis, bentuk, dan unsur dalam persamaan dan pertidaksamaan serta operasi matematika dalam menyederhanakan atau menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan, serta penerapan dan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

Pembahasan persamaan dan pertidaksamaan pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel meliputi konsep persamaan dan pertidaksamaan pertidaksamaan rasional dan irasional dari masalah kontekstual, pengertian persamaan, jenis, bentuk, dan unsur dalam persamaan dan pertidaksamaan rasional dan irasional serta operasi matematika dalam menyederhanakan

atau menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan rasional dan irasional, serta penerapan dan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan rasional dan irasional. Pembahasan sistem persamaan dan pertidaksamaan dua variabel (linear – kuadrat) meliputi prinsip dalam melakukan operasi matematika untuk menyederhanakan atau menyelesaikan sistem persamaan dan pertidaksamaan dua variabel. Peta konsep dari materi pelajaran tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Banyak aktifitas ataupun masalah sehari-hari yang berkaitan dengan penggunaan konsep persamaan dan pertidaksamaan dalam perdagangan, belanja, penjualan dan sebagainya. Misalkan dalam mengalokasikan berbagai persediaan uang yang dibelanjakan dan terbatas untuk dialokasikan pada berbagai jenis barang dengan menggunakan skala prioritas.

Setiap keluarga harus tepat, cerdas, bijak, hemat dan cermat dalam membelanjakan dan mengalokasikan penghasilannya untuk berbelanja terlebih dalam kondisi keuangan yang kritis, yaitu membeli barang-barang sesuai dengan tingkat kepentingan atau urgennya barang dibutuhkan.

Beberapa tips belanja cerdas menghindari menyimpan uang tunai terlalu banyak di dompet, menulis daftar belanja apa saja yang akan dibeli, memilih produk yang murah namun berkualitas, membandingkan harga-harga barang yang akan dibeli terlebih dahulu serta disiplin dengan daftar belanja yang sudah direncanakan dan dibuat.

UNIT 1

PERSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL DAN DUA VARIABEL SERTA PENERAPAN SEHARI-HARI

Tujuan dari mempelajari materi pada pembelajaran adalah untuk menggali informasi dan menemukan tentang konsep dari sistem persamaan linear satu variabel dan dua variabel yang diperoleh dari kesimpulan yang terdapat dalam masalah-masalah kontekstual sehari-hari yang disajikan seperti mengembangkan dan memilih jenis produk, serta masalah lainnya. Contoh atau persitiwa konstekstual dijabarkan kedalam bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel kemudian menggunakan konsep sistem persamaan tersebut untuk menyelesaikan soal.

Kegiatan membeli ikan yang dapat difungsikan untuk menemukan konsep tentang sistem persamaan linear satu variabel (PLSV).

Perhatikan ikan tongkol diatas, jika ibu mempunyai rencana membeli ke enam ikan ini dengan harga Rp 180.000,- berapa harga beli ikan tongkol tersebut jika budi membeli satu ikan tongkol? Salah satu pertanyaan sederhana yang timbul dari proses pembelian ikan tongkol diatas. Bagaimana kita dapat mengerjakan permasalahan di atas? Sebetulnya sangat sederhana. Dalam bayangan kita, akan bertanya sebetulnya harga awal 1 ikan tongkol itu berapa? Untuk memudahkan dalam penyelesaian, kita buat dalam bentuk variabel/huruf. Jika harga 1 ikan tongkol kita misalkan dengan variabel/huruf "x", diperoleh sebuah kalimat matematika yaitu 6 dikali "x" = Rp 180.000,- atau 6.x = Rp 180.0000,- sehingga dengan perubahan diatas, diperoleh nilai x = $\frac{180.0000}{6}$ = Rp 30.000,-

Bagaimana bentuk Persamaan Linear Satu Variabel? Lihat beberapa contoh dibawah ini!

(i) $2x + 5 = 0$
(ii) $x + y = 5$
(iii) $10 – 2p = - 12$
(iv) $y = 3x – 5$

Dari 4 contoh diatas, manakah yang menurut Anda merupakan persamaan linear satu

variabel? Sebelum menjawabnya, lihat definisi dari variabel terlebih dahulu. **Variabel** adalah lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas. Variabel disebut juga peubah. Variabel biasanya dilambangkan dengan huruf kecil a, b, c, ... z. Jadi, terlihat dengan jelas dari contoh diatas bahwa yang merupakan persamaan linear satu variabel adalah persamaan (i) dan (iii) dengan variabel x dan variabel p. Sedangkan, menurut Anda, kira-kira untuk persamaan (ii) dan persamaan (iv) termasuk kelompok yang mana? Ya, dengan jelas kita mengatakan bahwa kedua persamaan termasuk kelompok persamaan linear dengan dua variabel. Sekarang, dalam pikiran Anda mungkin akan timbul pertanyaan? Apa perbedaan antara persamaan dan pertidaksamaan? Sekarang kita simak lagi definisinya terlebih dahulu, **persamaan** adalah sebuah pernyataan matematika yang ditandai dengan simbol sama dengan "=", sedangkan **pertidaksamaan** adalah sebuah pernyataan matematika yang ditandai dengan simbol "<", ">", "≤", dan "≥". Itulah definisi secara umum dan cara mudah dalam membedakan keduanya.

Untuk menemukan konsep materi ini dengan sangat mudah, Anda harus selalu mengasah kemampuan untuk selalu bertanya. Pertanyaan terakhir! Kenapa diberi nama persamaan linear? Bukan nama persamaan yang lain?. Persamaan ini dikatakan linear jika hubungan ini digambarkan dalam sistem koordinat kartesius berbentuk garis lurus.

Ekspresi atau bentuk matematika merupakan gabungan atau kombinasi symbol-simbol matematika bilangan, konstata, variabel, operasi, fungsi, tanda baca, pengelompokan dan aspek lainnya yang membentuk kalimat matematika. Pada suatu ekspresi matematika, variabel merupakan lambang pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya, konstata merupakan bilangan yang tidak memuat variabel, koefisien adalah bilangan yang memuat variabel, dan suku adalah variabel beserta koefisien atau konstata yang dipisahkan oleh operasi jumlah atau pengurangan.

Ekspresi matematika yang memuat simbol kesamaan, "=", disebut dengan persamaan. Sedangkan persamaan dengan yang memuat satu variabel berpangkat satu pada setiap suku-sukunya disebut persamaan linear. Jadi, persamaan linear satu variabel (PLSV) adalah persamaan linear yang memiliki satu jenis variabel.

Untuk memahami konsep tentang Sistem Persamaan Linear Satu Variabel (PLSV), dapat diperoleh dari kesimpulan beberapa soal dibawah ini.

Contoh 1

Tulislah kalimat ini dengan bahasa matematika. "Suatu bilangan jika dikalikan 3 kemudian dikurangi 5, hasilnya adalah 10" dengan menggunakan variabel x sebagai pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya.

Penyelesaian:

Misalkan pengganti bilangan tersebut adalah “x”, berarti bahasa matematikanya 3x – 5 = 10.

KEGIATAN 1

1. Pahami secara seksama soal dibawah ini.
2. Ubahlah kalimat-kalimat dibawah ini dengan menggunakan bahasa matematika.
3. Tuliskan jawaban Anda dalam kolom yang sudah disediakan.

a		Kolam renang disamping mempunyai panjang 7 meter lebihnya dari lebarnya, ubahlah dalam kalimat tersebut dalam kalimat matematika! _____ _____ _____ _____ _____
b		Gambar disamping adalah jembatan Kutai Kartanegara (Mahakam II) dan merupakan 10 jembatan terpanjang di Indonesia. Jika jembatan Suramadu yang merupakan jembatan terpanjang di Indonesia mempunyai panjang 8 kali lipat dari jembatan Mahakam II, ubahlah dalam kalimat matematika yang sederhana! _____ _____ _____ _____
c		Jika umur ibu, 5 tahun yang akan datang mempunyai umur 3 tahun kurangnya dari 10 kali lipat umur adik yang paling kecil. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk kalimat matematika! _____ _____ _____ _____ _____

Berdasarkan contoh dan tugas tersebut, dapat disimpulkan bahwa bentuk umum persamaan linear satu variabel dapat dinyatakan sebagai

ax + b = c, di mana a, b, c konstan dan a ≠ 0

Sebuah persamaan dapat diubah ke bentuk persamaan lain yang ekivalen/setara dengan cara kedua ruas persamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan yang sama.

Penyelesaian atau akar dari persamaan linear satu variabel dicari dengan mengubah bentuk persamaan menjadi bentuk paling sederhana yang setara melalui manipulasi atau operasi matematika linear, yaitu dengan cara kedua ruas persamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan yang sama.

Contoh 2:

1. Selesaikanlah persamaan berikut x + 5 = 10

   Penyelesaian:

   x + 5 = 10

   x + 5 – 5 = 10 – 5 (ruas kanan dan kiri dikurangi 5)

   x = 5

   atau

   x + 5 = 10

   x = 10 – 5 (+5 pindah ruas menjadi – 5)

   x = 5

2. Selesaikan persamaan berikut 4x – 12 = - 8

   Penyelesaian:

   4x – 12 = - 8

   4x – 12 + 12 = - 8 + 12 (ruas kanan dan kiri ditambah 12)

   4x = 4

   4x. (1/4) = 4. (1/4) (ruas kanan dan kiri dikali 1/4)

   x = 1

   atau

   4x – 12 = - 8

$4x = -8 + 12$ (-12 pindah ruas menjadi + 12)

$4x = 4$

$x = 4/4$ (4 kali x, pindah ruas menjadi bagi 4)

$x = 1$

3. Tentukan penyelesaian dari persamaan $2(5 – x) = 4(2x – 5)$

Penyelesaian:

Bagaimana jika menemukan soal seperti diatas! Langkah yang paling sederhana adalah mengelompokkan suku-suku yang sejenis baik variabel maupun konstanta.

$2(5 – x) = 4(2x – 5)$

$10 – 2x = 8x – 20$ (sederhanakan menggunakan sifat aljabar yaitu distributif)

$-2x – 8x = -20 – 10$ (pindah ruas untuk mengelompokkan suku-suku sejenis)

$-10x = -30$

$x = -30/-10$ (-10 kali x, pindah ruas menjadi bagi -10)

$x = 3$

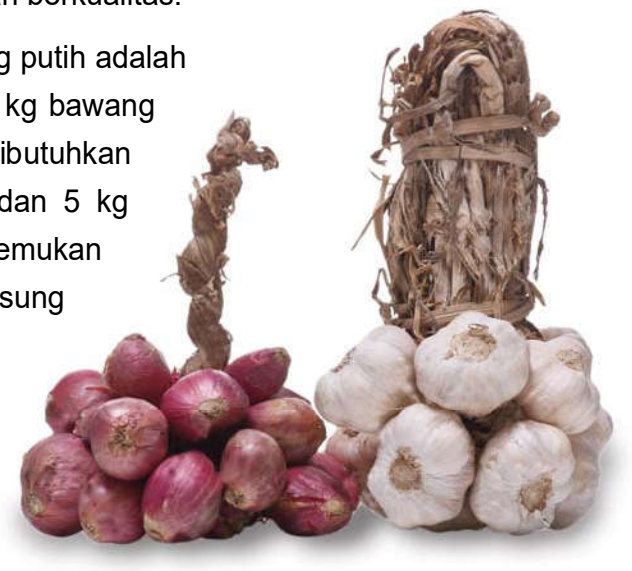
KEGIATAN 2

Selesaikan soal dibawah ini dengan tepat dan cermat sesuai dengan konsep persamaan linear satu variabel yang sudah dipelajari!

1. Tentukan nilai variabel-variabel dari soal dibawah ini
   a. $x – 15 = -8$
   b. $5 – t = 10$
   c. $3y + 7 = 25$
   d. $\frac{1}{2} a = -26$
   e. $1/3\ p + 3 = -99$
2. Jika keliling persegi adalah 64 cm dengan panjang sisinya $(6x + 4)$ cm. Tentukan nilai x!
3. Ibu Sumiatun akan membelanjakan uang hasil bekerja dipasar. ½ uangnya dipergunakan untuk membeli baju, 1/3 uangnya dipergunakan untuk membeli keperluan memasak, uang sisa di dompetya tinggal Rp . 180.000,-. Berapakah total uang hasil bekerja dari Ibu Sumiatun tersebut?

4. Sebuah persegipanjang mempunyai ukuran panjang (3x – 5) cm dan lebar (x + 3) cm. Jika keliling persegipanjang 52 cm, maka panjang dan lebar persegipanjang berturut-turut adalah ….
5. Pak Budiman membeli obat sakit kepala dari apotek “Bunda”, sebanyak 5 tablet dengan harga Rp 120.000,- pada hari dan toko yang sama Budi membeli obat sakit kepala dengan merk yang sama sebanyak 3 tablet dengan harga Rp 72.000,-. Jika mandra mau membeli obat yang sama sebanyak 12 tablet. Berapakah uang yang harus dibayarkan?

Sekarang perhatikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan persamaan linear dua variabel berikut. Kegiatan jual beli bawang merah dan bawang putih serta memilih manakah bawang merah dan putih yang baik dan berkualitas.



Harga 3 kg bawang merah dan 2 kg bawang putih adalah Rp 65.000,-. Harga 1 kg bawang merah dan 3 kg bawang putih adalah Rp 75.000,-. Berapa harga yang dibutuhkan Pak Budi jika membeli 5 kg bawang merah dan 5 kg bawang putih di toko yang sama? Jika menemukan permasalahan seperti ini, dalam benak kita langsung muncul pertanyaan? Sebetulnya berapa harga 1 kg bawang merah dan 1 kg bawang putih? Bisakah kita menebaknya dengan acak? Permasalahan yang sederhana inilah yang mengawali munculnya konsep Persamaan Linear Dua Variabel? Maksudnya bagaimana? Kita misalkan saja harga 1 kg bawang merah = x dan harga 1 kg bawang putih = y. Boleh tidak? Jika variabel yang dipilih tidak x dan y? Jawabannya boleh. Ini hanya permisalan untuk memudahkan dalam penyelesaian permasalahan. Muncullah bahasa matematika dari permasalahan di atas dan diperoleh dua persamaan yaitu

3x + 2y = Rp 65.000,-

1x + 3y = Rp 75.000,-

Dengan munculnya dua buah persamaan ini, maka penyelesaian selanjutnya akan lebih mudah. Kemampuan dalam memahami dan menelaah permasalahan-permasalahan menjadi bahasa matematika ini yang harus selalu rutin di asah oleh Anda!

Bagaimana bentuk umum Persamaan Linear Dua Variabel?

Lihat saja contoh dibawah ini!

(i) $2x + 2y = 3$
(ii) $P - 5q = 10$
(iii) $Y = 3x - 2$
(iv) $6y + 4 = 4x$
(v) $y = 2x2 - 5$

Dari 5 contoh diatas, manakah yang merupakan persamaan linear dua variabel? Sebelum menjawabnya, terlihat dengan jelas dari contoh diatas bahwa yang merupakan persamaan linear dua varibel adalah persamaan (i), (ii), (iii) dan (iv) dengan variabel x, y, p dan variabel q. Sedangkan, menurut Anda, kira-kira untuk persamaan (v) termasuk kelompok yang mana? Padahal juga mempunyai dua variabel yaitu x dan y. Ya, persamaan (v) termasuk kelompok persamaan kuadrat karena variabel x mempunyai pangkat 2 (kuadrat).

Dari contoh diatas dan penjabaran serta penelaan dari permasalahan, kita temukan konsep sederhana dari persamaan linear dua variabel.

Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV) adalah persamaan linear yang memiliki dua jenis variabel dengan pangkat masing-masing variabelnya berdejarat 1.

Dua atau lebih persamaan linear dua variabel dengan jenis variabel yang sama dapat membentuk sistem yang kita sebut dengan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV). Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel/peubah adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 konstan dengan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol, serta a_2 dan b_2 tidak keduanya nol. Nilai – nilai pengganti peubah x dan y yang membuat sistem persamaan di atas bernilai benar disebut penyelesaian sistem persamaan tersebut. Himpunan yang beranggotakan penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan diatas disebut dengan himpunan penyelesaian.

Contoh 3:

Tulislah kalimat ini dengan bahasa matematika. “Jika umur Ibu Sarminah 8 Tahun lebih tua dari Umur Ibu Muthmainnah, dan jika dijumlahkan umur keduanya 94 tahun dengan menggunakan variabel x dan y sebagai pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya!

Jawab:

Misalnya :

Umur Ibu Sarminah = y dan Umur Ibu Muthmainnah = x

Dari permasalahan di atas, ada dua pokok kalimat yang bisa digali dan ditelaah

Pernyataan pertama “Ibu Sarminah 8 tahun lebih tua dari umur Ibu Muthmainnah” menjadi suatu persamaan y = x + 8

Pernyataan kedua “jika dijumlahkan umur keduanya 94 tahun” menjadi suatu persamaan x + y = 94

KEGIATAN 3

1. Pahami secara seksama soal dibawah ini.
2. Ubahlah kalimat-kalimat dibawah ini dengan menggunakan bahasa matematika.
3. Tuliskan jawaban Anda dalam kolom yang sudah disediakan.

a		Biaya masuk stadion sepakbola untuk anak-anak Rp 3.000,- sedangkan dewasa Rp 5.000,-. Pada suatu pertandingan persahabatan panitia memperoleh penghasilan Rp 1.460.000,- dengan jumlah penonton 900. Ubahlah dalam kalimat matematika! _____ _____ _____ _____ _____
b		Panjang sawah yang berbentuk persegi panjang dua kali lebarnya. Jika keliling sawah 72 meter. Ubahlah dalam kalimat matematika! _____ _____ _____ _____ _____

c		Biaya tiga meja dan delapan kursi adalah Rp 1.500.000,-. Jika biaya meja lebih mahal Rp 150.000,- dari kursi. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk kalimat matematika! _____ _____ _____ _____

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua varibel, ada beberapa metode yang bisa digunakan yaitu metode grafik, substitusi, eliminasi, gabungan substitusi dan eliminasi, determinan dan matriks. Pada modul kali ini yang akan dibahas adalah penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan metode substitusi, metode eliminasi dan metode menggunakan operasi baris.

1. Metode Subtitusi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, dengan menggunakan metode substitusi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- **Langkah 1**
  Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana kemudian ubahlah salah satu persamaan tersebut kedalam persamaan lain yang baru.
- **Langkah 2**
  Substitusikan/masukkan persamaan di langkah 1 kedalam persamaan yang lain sehingga terbentuk persamaan linear satu variabel.
- **Langkah 3**
  Kemudian selesaikan persamaan tersebut menggunakan konsep persamaan linear satu variabel sehingga diperoleh salah satu nilai dari variabel tersebut.
- **Langkah 4**
  Substitusikan nilai yang diperoleh di langkah 3 kedalam persamaan sehingga diperoleh nilai dari kedua variabel.

Contoh 4:

Dengan menggunakan metode substitusi, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear

$2x + y = 4$

$5x - 2y = 1$

Jawab:

$2x + y = 4$ ..... pers. (i)

$5x - 2y = 1$ ..... pers. (ii)

Persamaan (i) diubah kedalam persamaan baru

$2x + y = 4$

$y = 4 - 2x$ ..... pers.(iii)

Persamaan (iii) yaitu $y = 4 - 2x$ disubstitusikan ke persamaan (ii)

$5x - 2y = 1$

$5x - 2(4 - 2x) = 1$

$5x - 8 + 4x = 1$

$9x = 9$

$x = 1$

Nilai $x = 1$ disubstitusikan ke persamaan (iii)

$y = 4 - 2x$

$= 4 - 2(1)$

$= 2$

Jadi, diperoleh penyelesaian $x = 1$ dan $y = 2$ dan himpunan penyelesaiannya adalah {(1,2)}

2. Metode Eliminasi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi, langkah-langkah yang dilakukan adalah

- **Langkah 1**
  Eliminasikan (hilangkan) salah satu variabel, dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan suku-suku yang sama dari kedua persamaan sehingga diperoleh nilai dari variabel yang lain. Misalkan menghilangkan variabel x untuk mencari nilai variabel y.
- **Langkah 2**
  Seperti pada langkah yang pertama, Eliminasikan (hilangkan) salah satu variabel, dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan suku-suku yang sama dari kedua persamaan sehingga diperoleh nilai dari variabel yang lain. Misalkan menghilangkan variabel y untuk mencari nilai variabel x.

Contoh 5:

Dengan menggunakan metode eliminasi, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear

$2x + y = 4$

$5x – 2y = 1$

Jawab:

Menghilangkan variabel x untuk mencari nilai dari variabel y

$$\begin{array}{lll} 2x + y = 4 \; |x5| & 10x + 5y & = 20 \\ 5x - 2y = 1 \; |x2| & 10x - 4y & = 2 \\ \hline & 9y & = 18 \quad - \\ & y & = 2 \end{array}$$

Menghilangkan variabel y untuk mencari nilai dari variabel x

$$\begin{array}{lll} 2x + y = 4 \; |x2| & 4x + 2y & = 8 \\ 5x - 2y = 1 \; |x1| & 5x - 2y & = 1 \\ \hline & 9x & = 9 \quad + \\ & x & = 1 \end{array}$$

Jadi, diperoleh penyelesaian x = 1 dan y = 2 dan himpunan penyelesaiannya adalah {(1,2)}

Metode eliminasi dan substitusi digunakan secara bersama-sama untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dua variabel. langkah-langkah yang dilakukan adalah

- **Langkah 1**
  Eliminasikan (hilangkan) salah satu variabel, dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan suku-suku yang sama dari kedua persamaan sehingga diperoleh nilai dari variabel yang lain. Misalkan menghilangkan variabel x untuk mencari nilai variabel y.
- **Langkah 2**
  Substitusikan nilai dari variabel yang sudah diperoleh di langkah 1 kedalam salah satu persamaan sehingga diperoleh nilai dari variabel yang lain.

Contoh 6:

Dengan menggunakan metode campuran, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear di bawah ini!

$2x + y = 4$

$5x - 2y = 1$

Jawab:

Menghilangkan variabel x untuk mencari nilai dari variabel y

$2x + y = 4 \ |x5| \quad 10x + 5y = 20$

$5x - 2y = 1 \ |x2| \quad 10x - 4y = 2$

$\_\_\_\_\_ -$

$9y = 18$

$y = 2$

Substitusikan nilai y = 2 ke dalam salah satu persamaan

$2x + y = 4$

$2x + 2 = 4$

$2x = 4 - 2$

$2x = 2$

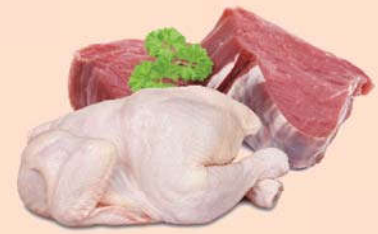
$x = 1$

Jadi, diperoleh penyelesaian x = 1 dan y = 2 dan himpunan penyelesaiannya adalah {(1,2)}

KEGIATAN 4

Selesaikan soal dibawah ini dengan tepat dan cermat sesuai dengan konsep persamaan linear dua variabel yang sudah dipelajari!

a		Asri membeli 3 buah roti A dan 5 buah roti B dengan harga Rp 39.000,00. Sedangkan Barkah juga membeli 1 buah roti A dan 1 buah roti B denga harga Rp 11.000,00. Jika Cantik ingin membeli 4 buah roti A dan 2 buah roti B, maka jumlah uang yang harus ia bayar adalah ….

b		Harga 4 buku tulis dan 3 pensil adalah Rp 13.500,00, harga 3 buku tulis dan 2 pensil Rp 9.750,00, maka harga 2 buku tulis dan 3 pensil adalah ….
c		Harga 2 kg apel dan 6 kg melon Rp 46.000,00 sedangkan harga 4 apel dan 33 kg melon Rp 47.000,00. Haga 5 kg apel dan 3 kg melon adalah …
d		Nunik membeli 1 kg daging sapi dan 2 kg ayam potong dengan harga Rp 94.000,00. Nunik membeli 3 kg ayam potong dan 2 kg daging sapi denga harga Rp 167.000,00. Berapa harga 1 kg daging sapi dan 1 kg ayam potong?
e		Pada sebuah toko, Hida dan Anis membeli terigu dan beras dengan merek yang sama. Hida membeli 6 kg terigu dan 10 kg beras seharga Rp 84.000,00, sedangkan Anis membeli 10 kg terigu dan 5 kg beras seharga Rp 70.000,00. Harga 8 kg terigu dan 20 kg beras adalah ….

UNIT 2

SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL DAN NILAI MUTLAK

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran dari unit ini adalah untuk menggali materi-materi dan menemukan konsep dari sistem pertidaksamaan linear satu variabel dan nilai mutlak dari masalah-masalah kontekstual serta menggunakan konsep tersebut dalam menyelesaikan soal sehari-hari seperti merencanakan dan mengalokasikan belanja dan sebagainya.

Mengidentifikasi masalah yang berhubungan dengan pertidaksamaan linear satu variabel dan nilai mutlak kemudian membuat model matematika serta menyelesaikannya dengan langkah-langkah penyelesaian.

Gambar 2.1 Rencana Keuangan

Perencanaan dalam berbelanja diperlukan sebagai bagian dari perencanaan keuangan karena sumber daya manusia pasti memiliki keterbatasan. Kurang bijak jika pergi berbelanja tanpa perencanaan. Point-point pertanyaan penting yang perlu diperhatikan. Rencananya mau belanja dimana? Mau belanja apa saja? Membutuhkan anggaran berapa? Sumber daya anggaran pastilah tidak tak terbatas. Dalam manajemen keuangan keluarga, usahakan untuk pengeluaran ditekan dan direncanakan dengan biaya seminimal mungkin, namun bisa terpenuhi semua

yang dibutuhkan. Tujuan umum dari manajemen keluarga itu sendiri adalah Proteksi (insurance planning), Investasi dan tabungan (investment planning), Pensiun (retirement planning), Pendidikan (education planning), Pajak Penghasilan (income tax planning) dan Warisan (estate planning). Pengeluaran seminimal mungkin dengan mendapatkan hasil semaksimal mungkin, identik dengan pertidaksamaan dalam Matematika. Pertidaksamaan merupakan ekspresi atau bentuk matematika yang memuat simbol ketidaksamaan yaitu <, ≤, >, atau ≥

Berikut contoh notasi pertidaksamaan beserta arti dan contoh aplikasinya

Notasi	Arti	Contoh
<	lebih kecil kurang dari	2 < 3 x + 1 < 3
>	lebih besar lebih dari	3 > 2 3x + 1 > 5
a < x < b	diantara a dan b	2 < x < 5
a < x ≤ b	diantara a dan b bila maksimal b	2 < x ≤ 5
a ≤ x < b	diantara a dan b bila nilai minimal a	2 ≤ x < 5
a ≤ x ≤ b	diantara a dan b bila minimal a dan maksimal b	2 ≤ x ≤ 5
≠	tidak sama dengan	2 ≠ 3 x + 1 ≠ 3
≤	lebih kecil atau sama dengan batas dibawah maksimum maksimal sebanyaknya paling banyak tidak lebih dari sekurangnya	2 ≤ 3 x + 1 ≤ 3
≥	lebih besar atau sama dengan batas diatas minimum minimal sesedikitnya paling sedikit tidak kurang dari selebihnya	3 ≥ 2 3x + 1 ≥ 5

Berbagai contoh konteks atau kejadian sehari-hari terkait dengan pertidaksamaan dapat diilus-trasikan dalam tabel berikut.

No	Pernyataan	Bentuk Aljabar
1	Sebuah bilangan tidak lebih dari 8	8 ≥ x
2	Sebuah bilangan sekurang-kurang bernilai 3	X ≥ 3

No	Pernyataan	Bentuk Aljabar
3	Nilai enam kali sebuah bilangan tidak lebih dari 4	$4 \geq 6x$
4	9 lebihnya dari lima kali sebuah bilangan adalah kurang dari bilangan lainnya	$9 + 5x < y$
5	Kuadrat sebuah bilangan bertambah 4 hasilnya tidak lebih dari 9	$X^2 + 4 \leq 9$
6	Temperatur sebuah benda tidak lebih dari 21 derajat Celcius	$T \leq 21$
7	Jumlah 3 bilangan genap berturutan kurang dari 91	$x + x + 2 + x + 4 < 91$
8	158 dikurangi lima kali sebuah bilangan hasilnya kurang dari bilangan tersebut ditambah 21	$158 - 5x < x + 21$
9	Jumlah usia dua anak tak kurang dari 21 tahun	$X + y \geq 21$
10	Hasil kali dua bilangan lebih dari 24	$Xy > 24$

Ekspresi matematika yang memuat simbol ketidaksamaan disebut dengan pertidaksamaan. Sedangkan pertidaksamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu pada setiap suku-sukunya disebut pertidaksamaan linear. Jadi, pertidaksamaan linear satu variabel (PLSV) adalah pertidaksamaan linear yang memiliki satu jenis variabel.

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah pertidaksamaan linear yang memiliki satu dengan variabel. Pertidaksamaan linear satu variabel dapat berbetuk

$$\mathbf{ax + b < c,\ ax + b \leq c,\ ax + b > c,\ atau\ ax + b \geq c}$$

dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$

Cara menyelesaikan pertidaksamaan linear satu variabel

1. Menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama tanpa mengubah tanda ketidaksamaan;
2. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama tanpa mengubah tanda ketidaksamaan;
3. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama tetapi tanda ketidaksamaan berubah, dimana tanda “>” berubah menjadi “<”, tanda “<” berubah menjadi “>”, tanda “≤” berubah menjadi “≥”, dan tanda “≥” berubah menjadi “≤”

Untuk memahami tentang pertidaksamaan, berikut beberapa contoh permasalahan beserta solusinya.

Contoh 1:

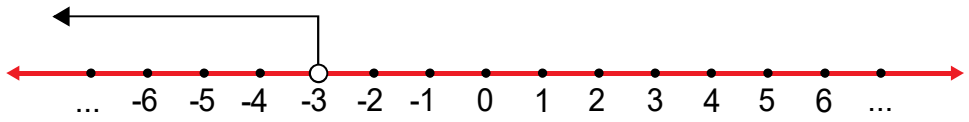
Tentukan penyelesaian pertidaksamaan dari

a. $2x + 6 < 0$
b. $-5x - 25 \leq 0$
c. $3x - 15 > 0$
d. $3x + 12 \geq 0$

Jawab:

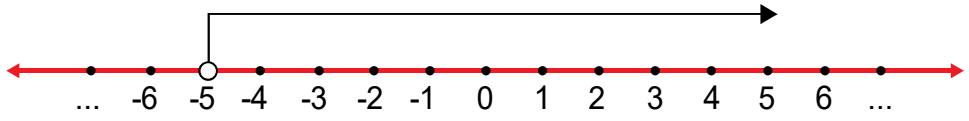
a.
$$\begin{aligned} 2x + 6 &< 0 \\ 2x + 6 - 6 &< 0 - 6 \quad \text{(dikurangi 6)} \\ 2x &< -6 \\ (1/2).2x &< (1/2).(-6) \quad \text{(dikali 1/2)} \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Garis bilangannya, yaitu



b.
$$\begin{aligned} -5x - 25 &\leq 0 \\ -5x - 25 + 25 &\leq 0 + 25 \quad \text{(ditambah 25)} \\ -5x &\leq 25 \\ (-1/5).(-5x) &\leq (-1/5).25 \quad \text{(dikali (-1/5), tanda akan berubah)} \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

Garis bilangannya, yaitu



c. $3x - 15 > 0$

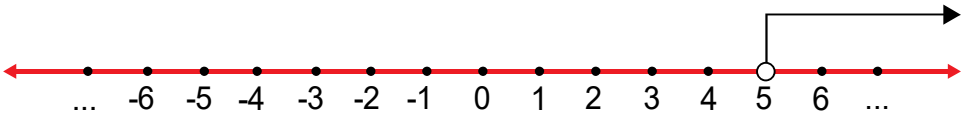
$3x - 15 + 15 > 0 + 15$ (ditambah 15)

$3x > 15$

$(1/3).3x > (1/3).15$ (dikali 1/3)

$x > 5$

Garis bilangannya, yaitu



d. $3x + 12 \geq 0$

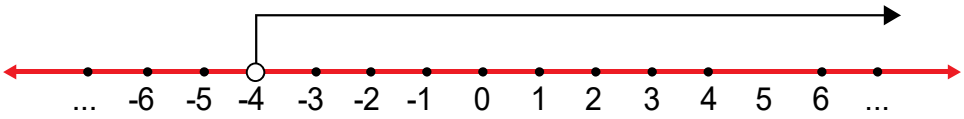
$3x + 12 - 12 \geq 0 - 12$ (dikurangi 12)

$3x \geq -12$

$(1/3).3x \geq (1/3).(-12)$ (dikali 1/3 , tanda tetap)

$x \geq -4$

Garis bilangannya, yaitu



Contoh 2:

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan dari $8y - 4 < 3y + 9$

Jawab:

$8y - 4 < 3y + 9$

$8y - 3y < 9 + 4$

$5y < 13$

$y < 13/5$

Jadi, penyelesaiannya adalah $y < 13/5$

Contoh 3:

Tentukan penyelesaian paling sederhana dari pertidaksamaan

$$\frac{2x - 3}{4} - \frac{x + 4}{6} \geq \frac{2}{3}$$

Jawab:

$$\frac{2x - 3}{4} - \frac{x + 4}{6} \geq \frac{2}{3}$$ (dikali dengan 12, diperoleh dari KPK 3,4 dan 6)

$$3(2x - 3) - 2(x + 4) \geq 8$$
$$6x - 9 - 2x - 8 \geq 8$$
$$4x - 17 \geq 8$$
$$4x \geq 8 + 17$$
$$x \geq \frac{25}{4}$$

Jadi, penyelesaiannya $x \geq \frac{25}{4}$

KEGIATAN 1

Dengan menggunakan konsep penyelesaian diatas, selesaikan soal pertidaksamaan di bawah ini!

1. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x + 5 < 6$!
2. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $5x - 10 > 7$!
3. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $9 - 4x \leq 45$!
4. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $x + 5 < 2x - 4$!
5. Tentukan penyelesaian dari $12 - 5a \geq 3a$!
6. Diketahui pertidaksamaan $13 - 2(y + 1) > (y + 1) - 8$. Penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah ….
7. Tentukan batas nilai x dari pertidaksamaan $1 < 2x - 1 < 3$!
8. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2(2m - 3) > 3(2m + 4)$, dengan m adalah bilangan bulat ganjil adalah ….

9. Model kerangka kubus disamping dibuat dengan panjang rusuknya (x + 2) cm. Jika panjang kawat yang dibutuhkan tidak melebihi 180 cm. Tentukan panjang rusuk maksimum dari kubus tersebut!
10. Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 400. Jika bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, maka tentukan batas-batas nilai dari kedua bilangan tersebut!

Nilai Mutlak

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita dihadapkan pada permasalahan yang berhubungan dengan jarak. Misalnya kita ingin menghitung jarak antara kota yang satu dengan kota yang lainya. Dalam kaitannya dengan pengukuran jarak antara dua tempat ini, timbulah sesuatu keistimewaan, bahwa jarak ini harganya selalu positif. Dengan kata lain pengukuran jarak antara dua tempat nilainya tidak pernah negatif. Begitupun dengan kisaran banyaknya uang yang harus dibawa dalam dompet, dimana pasti selalu bernilai positif. Uang yang dibawa dilebihkan sedikit untuk menghindari kebutuhan yang tidak terduga dalam kegiatan berbelanja, misalnya biaya untuk parker dan biaya tak terduga lainnya. Sehingga diperlukan konsep nilai mutlak, yaitu nilai non negative dari suatu bilangan

Definisi:

Untuk setiap bilanga real x, harga mutlak dari x ditulis $|x|$ dan

$$|x| = \begin{cases} x\ , x > 0 \\ x\ , x < 0 \end{cases}$$

Pada bagian ini, kita akan membahas berbagai pertidaksamaan satu variabel yang memuat nilai mutlak dari bentuk linear

Contoh:

$|ax + b| < c$; $|ax + b| \leq c$; $|ax + b| > c$; atau $|ax + b| \geq c$

dengan a, b, c adalah konstanta dan $a \neq 0$.

Contoh:

$|6| = 6$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$

Karena nilai mutlak selalu bernilai non negatif, maka kita dapat pula menuliskan sebagai

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Beberapa sifat nilai mutlak, yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah yang melibatkan nilai mutlak adalah sebagai berikut.

a. $|ab| = |a|\,|b|$

b. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

c. $|a + b| \le |a| + |b|$ dan $|a - b| \ge |a| - |b|$

d. apabila $|x| < b$, maka $-b < x < b$

e. apabila $|x| > b$, maka $x < -b$ atau $x > b$

Contoh:

Selesaikan pertidaksamaan $|x - 4| \le 1.5$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak, diperoleh

$|x - 4| \le 1.5 \Leftrightarrow -1.5 \le x - 4 \le 1.5$

$\Leftrightarrow -1.5 + 4 \le x - 4 + 4 \le 1.5 + 4$

$\Leftrightarrow -2.5 \le x \le 5.5$

Jadi, HP = $\{x \mid -2.5 \le x \le 5.5\} = [-2.5, 5.5]$

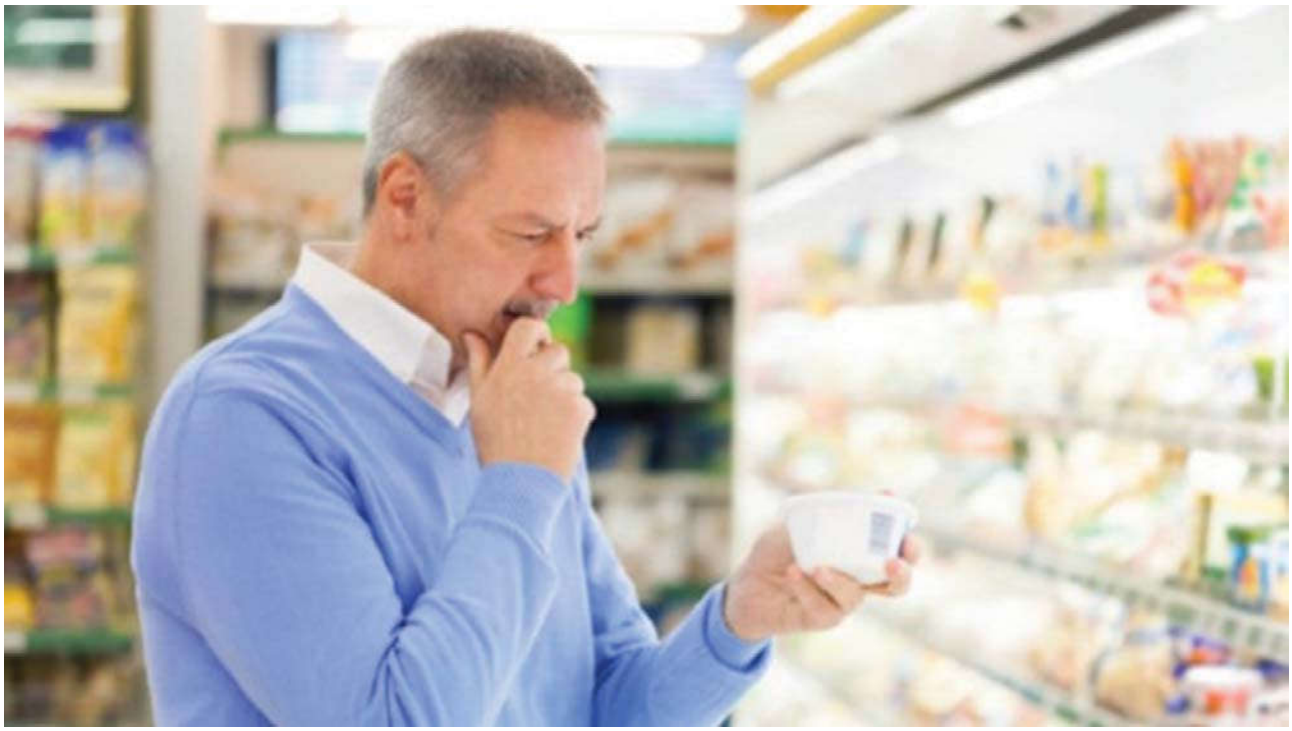
LATIHAN 1

1. Selesaikan pertidaksamaan berikut
   a. $|x + 1| < 4$
   b. $|x/3 - 2| \le 6$
   c. $|4x + 2| \ge 10$
   d. $|2 + 5/x| > 1$
   e. $|1/x - 3| < 6$
   f. $|x - 2| < 7$
2. Selesaikan pertidaksamaan berikut
   a. $|x - 2| < 3|x + 7|$
   b. $|2x - 5| > |x + 4|$

3. Sebuah pabrik memproduksi jarum dengan diameter 2 mm dan toleransi 0.01 mm. Apabila d diameter jarum setelah dicetak, maka:
   a. Tentukan bentuk pertidaksamaan yang memuat d agar jarum yang diproduksi memenuhi syarat
   b. Tentukan batas nilai d

UNIT 3 PERTIDAKSAMAAN RASIONAL DAN IRASIONAL SATU VARIABEL

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran dari Sub Unsur 3 ini adalah untuk menggali materi-materi dan menemukan konsep dari pertidakssamaan rasional dan irasional satu variabel kemudian menyelesaikannya sesuai dengan langkah-langkah penyelesaian, kemudian menentukan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat), menggali dan membuat model matematika yang didapatkan dari masalah-masalah kontekstual yang disajikan, menemukannya serta menggunakan konsep tersebut untuk penyelesaian masalah membandingkan harga, kebutuhan barang serta masalah sehari-hari lainnya.



Persamaan/pertidaksamaan rasional atau pecahan adalah persamaan/pertidaksamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan dengan penyebut dan pembilang berupa ekspresi/bentuk aljabar atau fungsi aljabar. Apabila penyebut atau pembilangnya berupa fungsi atau bentuk non aljabar, maka disebut persamaan/pertidaksamaan irasional.

Dalam menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan rasional ataupun irasional, yang perlu diperhatikan bahwa penyelesaiannya berlaku untuk penyebut dari bentuk persamaan/pertidak-

samaan bernilai tidak sama dengan nol. Jadi, secara umum, persamaan rasional/irasional satu variabel dapat dinyatakan sebagai:

$f(x)/g(x) = a$, a konstan dan $g(x) \neq 0$

Sedangkan pertidaksamaan rasional/irasional satu variabel dapat dinyatakan sebagai:

$f(x)/g(x) < a$, $f(x)/g(x) \leq a$, $f(x)/g(x) > a$, atau $f(x)/g(x) \geq a$, a konstan dan $g(x) \neq 0$

PENUGASAN

1. Apakah persamaan linear, persamaan kuadrat, persamaan polinom dan bentuk persamaan aljabar lainnya dapat dikatakan sebagai persamaan rasional? Jelaskan.
2. Apakah pertidaksamaan linear, pertidaksamaan kuadrat, pertidaksamaan polinom dan bentuk pertidaksamaan aljabar lainnya dapat dikatakan sebagai persamaan rasional? Jelaskan.

Contoh:

Selesaikan persamaan rasional $\frac{x+4}{6} = \frac{4}{x+2}$

Jawab:

Dari bentuk persamaan diperoleh $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

Dengan melakukan operasi matematika, diperoleh

$$\frac{x+4}{6} = \frac{4}{x+2} \rightarrow (x+4)(x+2) = 24$$
$$\rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$
$$\rightarrow (x+8)(x-2) = 0 \rightarrow x = -8 \text{ atau } x = 2$$

Contoh 1:

Tentukan solusi dari pertidaksamaan rasional $\frac{2x-7}{x-5} \leq 3$

Jawab:

$$\frac{2x-7}{x-5} \leq 3$$

$$\frac{2x - 7}{x - 5} \leq 3$$

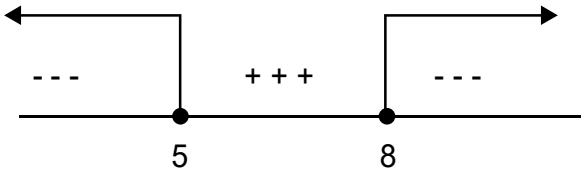
$$\frac{2x - 7}{x - 5} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x - 7}{x - 5} - \frac{-3\,(x - 5)}{x - 5} \leq 0$$

$$\frac{2x - 3x - 7 + 15}{x - 5} \leq 0$$

$$\frac{-3 + 8}{x - 5} \leq 0$$

dengan $x \neq 5$



Untuk mencari tanda "+" atau "-", masukkan bilangan yang memenuhi. Misalnya bilangan 1, maka jika saya masukkan ke pertidaksamaannya akan bernilai (-1+8)/(1-5) =7/(-4) = - 7/4 (bernilai negatif). Misalkan bilangan 6. Jika saya masukkan menjadi (-6+8)/(6-5) = 2/1 (bernilai positif).

Jadi, penyelesaiannya adalah $x < 5$ atau $x \geq 8$

Salah satu bentuk persamaan/pertidaksamaan irrasional adalah yang memuat variabel-variabelnya terdapat dibawah tanda akar (bisa berupa akar pangkat dua, akar pangkat tiga, ataupun akar pangkat yang lebih tinggi). Setiap bilangan atau ekspresi di bawah tanda akar selalu bernilai positif dan nol. Misalkan

$\sqrt{x - 3} = 2$, di mana $x - 3 \geq 0$

$\sqrt{x + 5} < 2$, di mana $x + 5 \geq 0$ dan

$\sqrt{2x + 1} < \sqrt{x^2 - 2}$, di mana $2x + 1 \geq 0$ dan $x^2 - 2 \geq 0$

Contoh 2:

Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional berikut:

a. $\sqrt{x - 3} < 1$
b. $\sqrt{(1 - 2x \geq 3}$

Jawab:

a. Langkah pertama, dibawah tanda akar selalu bernilai nol dan positif

   $x - 3 \geq 0$

   $x \geq 3$

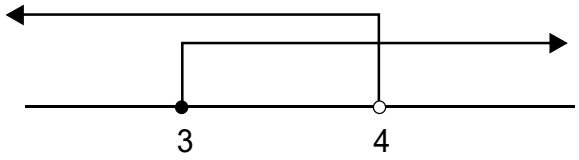
   Langkah kedua, kuadratkan untuk menghilangkan tanda akar

   $\sqrt{(x - 3)^2} < 1^2$

   $x - 3 < 1$

   $x < 4$

   Kemudian, digambarkan pada garis bilangan



   Penyelesaiannya $3 \leq x < 4$ dengan himpunan penyelesaiannya $\{x| 3 \leq x < 4\}$

b. Langkah pertama, dibawah tanda akar selalu bernilai nol dan positif

   $1 - 2x \geq 0$

   $- 2x \geq 0 - 1$

   $x \leq ½$

   Langkah kedua, kuadratkan untuk menghilangkan tanda akar

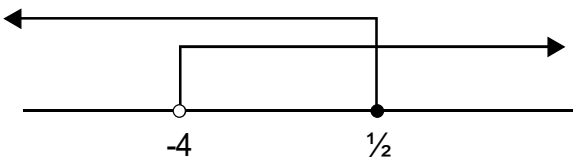
   $\sqrt{(1 - 2x)^2} < 3^2$

   $1-2x < 9$

   $-2x < 8$

   $x > - 4$

Kemudian, digambarkan pada garis bilangan



Penyelesaiannya $-4 < x \leq ½$ dengan himpunan penyelesaiannya $\{x| -4 \leq x < ½\}$

Sistem Persamaan Dua Variabel dari Bentuk Linear dan Kuadrat

Sistem persamaan dengan bentuk umum sebagai

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan a,b,p,q dan r adalah konstanta real

Merupakan bentuk dari sistem persamaan dua variabel dari bentuk linear dan kuadrat. Dalam menyelesaikan maslah tersebut, dapat menggunakan dua metode yaitu:

1. **Metode Grafik**

   Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan kuadrat dengan menggunakan metode grafik, menggunakan langkah-langkah berikut:

   Langkah 1

   Lukis atau gambarlah grafik fungsi linear dan grafik fungsi kuadrat dalam satu bidang koordinat dengan skala yang sesuai. Grafik fungsi linear berupa garis lurus dan fungsi kuadrat berupa parabola

   Langkah 2

   Buatlah garis vertikal dan horisontal yang memotong sumbu-sumbu koordinat dan melalui titik potong grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat

   Langkah 3

   Bacalah nilai absis dan ordinta dari titik potong kedua grafik tersebut (jika ada) . Titik potong tersebut adalah penyelesaian sistem persamaan linear dan kuadrat. JIka dalam gambar tidak ada titik perpotongan, maka sistem persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian.

KEGIATAN 1

Penugasan:

- Isilah jawaban sesuai dengan kolom yang tersedia.
- Selesaikan permasalahan dibawah dengan langkah-langkah penyelesaian
- Kegiatan ini dilakukan untuk mengetahui dan memahami cara menggunakan metode grafik dalam mencari penyelesaian

1. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan

   $x + y – 3 = 0$

   $y = x2 – 6x + 9$

   Jawab:

   Langkah 1

   - Carilah titik potong persamaan $x + y – 3 = 0$ terhadap sumbu x dan sumbu y

x + y = 3		
x	0	….
y	….	0
(x,y)	(0, ….)	(…., 0)

   Maka, titik potong pesamaan $x + y = 3$ terhadap sumbu x dan sumbu y adalah

   (0, ….) dan (…., 0)

   - Carilah titik potong persamaan $y = x^2 – 6x + 9$ terhadap sumbu x dan sumbu y
     Memotong sumbu y, maka $x = 0$

     $Y = (….) 2 – 6 (….) + 9$

     $Y = …..$

     Maka, titik potongnya (0, ….)

     Memotong sumbu x, maka $y = 0$

     $x^2 – 6x + 9 = 0$

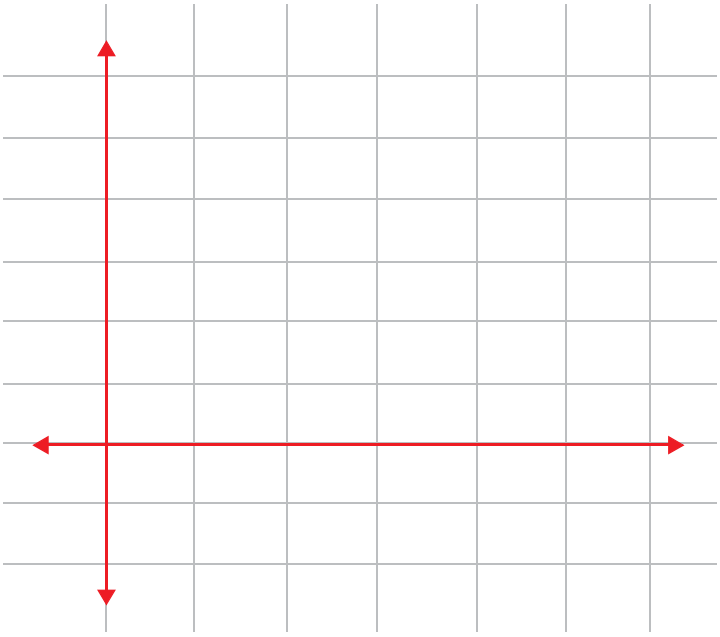
     $(x^1 - …) (x^2 - ….) = 0$

     $x^1 = ….$ atau $x^2 = ….$

     Maka titik potong terhadap sumbu x adalah (…. ,0) dan (…. ,0)

Langkah 2

Gambarlah dalam grafik kedua persamaan kedalam diagram kartesius dibawah ini



Langkah 3

Pada gambar, titik potong antara kedua grafik tersebut adalah (…, …) dan (…, …)

Jadi, penyelesaian sistem persamaan diatas adalah (…, …) dan (…, …).

2. Metode eliminasi dan/atau substitusi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan menggunakan metode subtitusi, dapat dilakukan langkah-langkah berikut ini.

Langkah 1

Ubahlah semua persamaan ke dalam bentuk umum

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$

Langkah 2

Substitusikan fungsi linear satu variabel ke dalam fungsi kuadrat atau sebaliknya sehingga diperoleh persamaan kuadrat baru.

Langkah 3

Ubahlah persamaan kuadrat baru ke bentuk umum persamaan kuadrat, yaitu $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c konstan dan $a \neq 0$. Dari persamaan kuadrat baru yang diperoleh, tentukan nilai diskriminannya yaitu $D = b^2 - 4ac$. Apabila $D \geq 0$, maka sistem persamaan tersebut memiliki penyelesaian. Tentukan penyelesaiannya.

Langkah 4

Substitusikan nilai-nilai x yang diperoleh dari Langkah 3 ke salah satu persamaan baik linear atau persamaan kuadrat, sehingga diperoleh pasangan berurutan dari masing-masing nilai x dan y.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $y - 2x = 2$ dan $y = x^2 - x - 2$

Jawab:

Langkah pertama, persamaan diubah kedalam bentuk

$y = 2x + 2$

$y = x^2 - x - 2$

kemudian, substitusikan

$y_{kurva} = y_{garis}$

$x^2 - x - 2 = 2x + 2$

$x^2 - x - 2x - 2 - 2 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x_1 = 4$ atau $x_2 = -1$

dengan $x_1 = 4$ maka $y_1 = 2(4) + 2 = 10$ dan diperoleh Titik (4,10)

dengan $x^2 = -1$ maka $y_2 = 2(-1) + 2 = 0$ dan diperoleh titik (-1,0)

Sehingga, himpunan penyelesaiannya {(4,10) dan (-1,0)}

Sistem Persamaan Dua Variabel dari Bentuk Kuadrat-Kuadrat

Sistem persamaan linear dan kuadrat memiliki bentuk umum

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$

Dengan a,b,c, p,q dan r adalah bilangan real dengan a≠ 0, p ≠ 0

Langkah penyelesaiannya adalah dengan mensubstitusikan persamaan kuadrat pertama dengan persamaan kuadrat kedua. Tentukan penyelesaian persamaan kuadrat yang terbentuk.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini!

$$\begin{cases} y_1 = -x^2 + 10x - 16 \\ y_2 = x^2 - 6x - 2 \end{cases}$$

Jawab:

Substitusikan antara persamaan kuadrat pertama dan persamaan kuadrat kedua

$y_2 = y_1$

$-x^2 + 10x - 16 = x^2 - 6x - 2$

$-x^2 - x^2 + 10x + 6x - 16 + 2 = 0$

$-2x^2 + 16x - 14 = 0$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$(x - 1)(x - 7) = 0$

$X = 1$ atau $x = 7$

- Dengan x = 1, maka
  $y1 = -(1)^2 + 10(1) - 16 = -7$
  $y2 = (1)^2 - 6(1) - 2 = -7$
  Jadi titiknya (1,-7)

- Dengan x = 7, maka
  $y_1 = -(7)2 + 10(7) - 16 = 5$
  $y_2 = (7)2 - 6(7) - 2 = 5$
  Jadi titiknya (7,5)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(1,-7), (7,5)}

Rangkuman

1. Ekspresi atau bentuk matematika merupakan gabungan atau kombinasi symbol-simbol matematika bilangan, konstata, variabel, operasi, fungsi, tanda baca, pengelompokan dan aspek lainnya yang membentuk kalimat matematika
2. Pada suatu ekspresi matematika, variabel merupakan lambang pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya, konstata merupakan bilangan yang tidak memuat variabel, koefisien adalah bilangan yang memuat variabel, dan suku adalah variabel beserta koefisien atau konstata yang dipisahkan oleh operasi jumlah atau pengurangan
3. Bentuk aljabar atau ekspresi aljabar merupakan ekspresi matematika yang memuat operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan dan tidak memuat ekspresi dan operasi non aljabar lainnya pada variabel yang terlibat.
4. Persamaan adalah bentuk aljabar atau ekspresi aljabar yang memuat tanda atau simbol persamaan, yaitu '='. Sedangkan persamaan dengan yang memuat satu variabel berpangkat satu pada setiap suku-sukunya disebut persamaan linear. Jadi, persamaan linear satu variabel (PLSV) adalah persamaan linear yang memiliki satu jenis variabel.
5. Dari sebuah persamaan linear satu variabel dapat dibentuk persamaan lain yang setara atau ekivalen dengan cara kedua ruas persamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan yang sama.
6. Penyelesaian atau akar dari persamaan linear satu variabel dicari dengan mengubah bentuk persamaan menjadi bentuk paling sederhana yang setara melalui manipulasi atau operasi matematika linear , yaitu dengan cara kedua ruas persamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan yang sama.
7. Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV) adalah persamaan linear yang memiliki dua jenis variabel dengan pangkat masing masing variabelnya berdejarat 1. Dua atau lebih persamaan linear dua variabel dengan jenis variabel yang sama dapat membentuk sistem yang disebut dengan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV). Sistem persamaan linear dua variabel dapat diselesaikan di antaranya dengan menggunakan metode grafik, substitusi, eliminasi, determinan, dan matriks.
8. Ekspresi matematika yang memuat simbol ketidaksamaan disebut dengan pertidaksamaan. Sedangkan pertidaksamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu pada setiap suku-sukunya disebut pertidaksamaan linear. Pertidaksamaan linear satu variabel (PLSV) adalah pertidaksamaan linear yang memiliki satu jenis variabel.
9. Nilai non negatif dari suatu bilangan atau ekspresi disebut dengan nilai mutlak. Jadi, nilai mutlak merupakan akar non negatif dari kuadrat suatu bilangan atau ekspresi.

10. Persamaan rasional atau pecahan adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan dengan penyebut dan pembilang berupa ekspresi/bentuk aljabar atau fungsi aljabar. Apabila penyebut atau pembilangnya berupa fungsi atau bentuk non aljabar, maka disebut persamaan irasional.
11. Pertidaksamaan rasional atau pecahan adalah pertidaksamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan dengan penyebut dan pembilang berupa ekspresi/bentuk aljabar atau fungsi aljabar. Apabila penyebut atau pembilangnya berupa fungsi atau bentuk non aljabar, maka disebut pertidaksamaan irasional.

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas X SMA/SMK, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990

https://id.wikipedia.org/wiki/Pertidaksamaan yang diakses tanggal pukul 08.00 WIB

https://www.cermati.com/artikel/6-cara-hemat-dengan-belanja-pintar yang diakses tanggal pukul 03.36 WIB

https://www.superindo.co.id/resep_dan_tips/tips_dan_trik/cara_memilih_ikan_yang_masih_baik_dan_segar yang diakses tanggal pukul 4.10 WIB

http://www.konsep-matematika.com/2016/01/pertidaksamaan-linear-satu-variabel.html

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 2

Memulai Bisnis

MATEMATIKA
Paket C Setara Kelas X SMA/MA

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Matematika Paket C Tingkatan V Modul Tema 2
Modul Tema 2 : Memulai Bisnis

- Penulis: Rain Adhistya

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
  Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
  Kebudayaan, 2018

iv+ 28 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar iii
Daftar Isi iv
Petunjuk Penggunaan Modul 1
Tujuan Pembelajaran Modul 1
Pengantar Modul 2
UNIT 1 KONTEKS PENGGUNAAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DALAM DUNIA USAHA DAN MASALAH SEHARI-HARI 4
Kegiatan 1 6
UNIT 2 STRATEGI SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL 8
Kegiatan 1 15
UNIT 3 PENYELESAIAN MASALAH YANG TERKAIT DENGAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL 17
Kegiatan 1 19
Kegiatan 2 21
Latihan 22
Rangkuman 24
Kriteria Pindah Modul 25
Saran Referensi 26
Daftar Pustaka 26

MEMULAI BISNIS

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi dan konsep system persamaan linear tiga variabel serta penggunaannya dalam kegiatan usaha/bisnis dan aktifitas sehari-hari yang ditemui dalam kehidupan. Tema terdiri atas subtema kebutuhan pasar, menetapkan harga, dan kebutuhan modal yang dikaitkan dengan penggunaan dari konsep sistem persamaan tiga variabel, mulai dari mengidentifikasi jenis konsep dari masalah kontekstual, membuat model matematika serta menyelesaikannya.

Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.

Tujuan Pembelajaran Modul

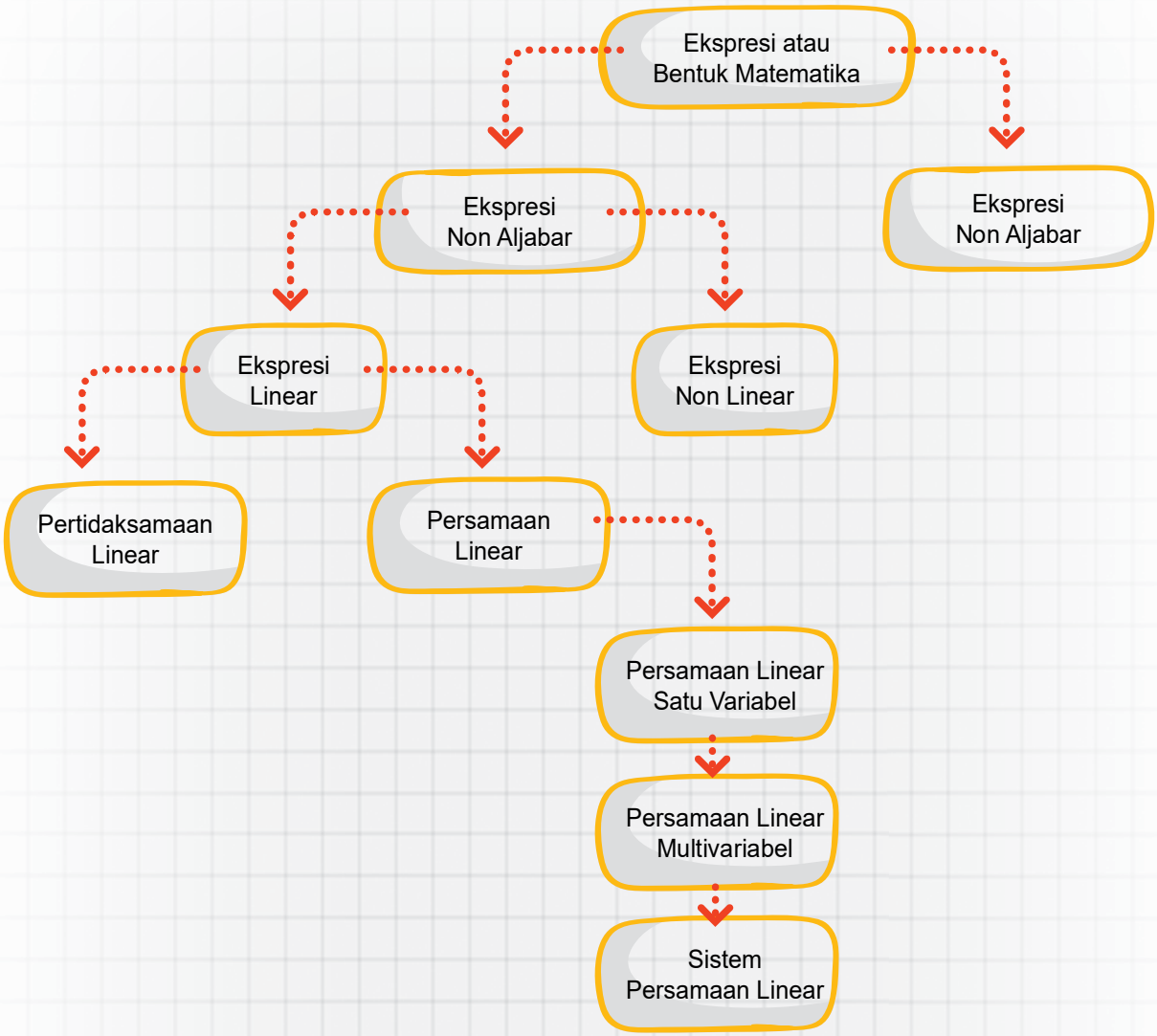
Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

1. Memahami konsep sistem persamaan linear tiga variabel dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan system persamaan linear tiga variabel serta penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan ekonomi dan masalah lainnya sehari-hari

Pengantar Modul

Banyak kalimat, pernyataan, peristiwa atau situasi sehari-hari yang dapat dinyatakan dalam simbol atau bahasa yang sederhana, ringkas dan akurat agar lebih mudah dipahami sehingga perlu dikenalkan konsep ekspresi matematika, persamaan atau pertidaksamaan selain menggunakan bentuk tabel, diagram/ilustrasi, atau gambar. Pada modul ini akan dibahas ekspresi matematika terutama yang terkait dengan konsep dan penggunaan dari sistem persamaan linear tiga variabel.

Pembahasan dimulai dengan konsep persamaan, persamaan linear, persamaan linear satu variabel, dua variabel dan tiga variabel, dan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel. Peta konsep dari materi pelajaran tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Konsep persamaan banyak diterapkan dan digunakan kegiatan usaha maupun kehidupan sehari-hari. Usaha adalah kegiatan dengan mengerahkan tenaga, pikiran, atau badan untuk mencapai suatu maksud; pekerjaan (perbuatan, prakarsa, ikhtiar, daya upaya) untuk mencapai suatu keuntungan. Banyak sekali peluang dilingkungan sekitar kita yang sangat sederhana sekali, namun bisa menjadi peluang bisnis dengan memanfaatkan pengetahuan dan kemampuan inovatif yang kita miliki.

Dengan berusaha, kita dapat meningkatkan dan memanfaatkan konsep matematika yang kita miliki dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam kegiatan usaha mulai dari kemandirian dalam mengelola keuangan/financial, waktu, mewujudkan produk/barang kebutuhan sehari-hari serta melakukan aktifitas social lainnya.

Pengetahuan atau konsep matematika yang diperlukan meliputi bagaimana mengelola dan menghitung sumber daya yang terbatas mulai dari mencari dan menganalisis kebutuhan pasar, menentukan ide usaha, menetapkan harga jual yang memadai berdasarkan perhitungan biaya yang dikeluarkan, membangun jaringan dan promosi.

UNIT 1

KONTEKS PENGGUNAAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DALAM DUNIA USAHA DAN MASALAH SEHARI-HARI

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran ini adalah untuk menggali materi-materi tentang konsep dari sistem persamaan linear yang didapatkan dari masalah-masalah kontekstual yang disajikan dan penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

Dalam pengalokasian belanja barang atau memproduksi barang adalah adanya informasi ataupun asumsi tentang kebutuhan manusia sesuai karakteristik masyarakatnya. Sehingga dapat ditentukan jenis produk, merencanakan sasaran realistis, menerapkan teknik pemasaran, dan memprediksi kebutuhan, dan ini digunakan untuk mengalokasikan jenis dan jumlah pembiayaan setiap komponen barang yang diperlukan dan penguasaan konsep matematika sangat membantu dalam penyelesaian masalah ini.

Memprediksi jenis dan jumlah kebutuhan barang di pasar oleh konsumen, memerlukan pengetahuan peluang. Nilai peluang ditentukan berdasarkan tingkat kemungkinan ataupun data pasar sebelumnya. Misalkan, tingkat kebutuhan atau peluang konsumsi masyarakat menjelang hari raya adalah lebih tinggi dari hari biasa. Berikut adalah gambaran penggunaan konsep matematika dalam permasalah alokasi barang di pasar.

Siapkan uang Rp 150.000,-, kemudian kita ke tiga toko yang saya misalkan toko A, toko B dan toko C. Dari toko A, dengan uang Rp 40.000,- yang kita belanjakan ternyata mendapatkan 8 kg buah jeruk, sedangkan dari toko B dengan uang sebesar Rp 80.000,- hanya mendapatkan 2 kg buah anggur dan sisanya dibelikan di Toko C dan hanya mendapatkan 6 kg buah jambu. Kegiatan sederhana ini bisa kita ubah menjadi bahasa matematika. Misalkan:

x = harga per kg buah jeruk di Toko A

y = harga per kg buah anggur di Toko B

z = harga per kg buah jambu di Toko C

Diperoleh tiga persamaan, 8.x = Rp 40.000,-; 2.y = Rp 80.000,- dan 6.z = Rp 30.000,-

$8x = 40.000$ $\quad$ $2y = 80.000$ $\quad$ $6z = 30.000$

$x = \frac{40.000}{8}$ $\quad$ $y = \frac{80.000}{2}$ $\quad$ $z = \frac{30.000}{6}$

$= 5.000$ $\quad$ $= 40.000$ $\quad$ $= 5.000$

Dengan demikian diperoleh harga per kg jeruk Rp 5.000,00; harga per kg anggur Rp 40.000,00 dan harga per kg buah jambu Rp. 5.000,00. Jika dijadikan satu, maka diperoleh persamaan yaitu 8x + 2y + 6z = 150.000.

Modal yang dipunyai hanya Rp 1.000.000,00, Modal tersebut dipersiapkan untuk membeli 5 box buah mangga, 3 box buah jeruk dan 2 box buah manggis. Jika variabel x menunjukkan harga per box buah mangga, variabel y menunjukkan harga per box buah jeruk dan variabel z menunjukkan harga per box buah manggis. Bagaimana persamaan matematis yang bisa terbentuk dari permasalahan ini?

Untuk menyelesaikan masalah kontekstual diatas, variabel x,y dan z sudah menunjukkan harga per box buah masing-masing. Jika diuraikan

x = harga per box buah mangga

y = harga per box buah jeruk

z = harga per box buah manggis

Maka, persamaan yang terbentuk

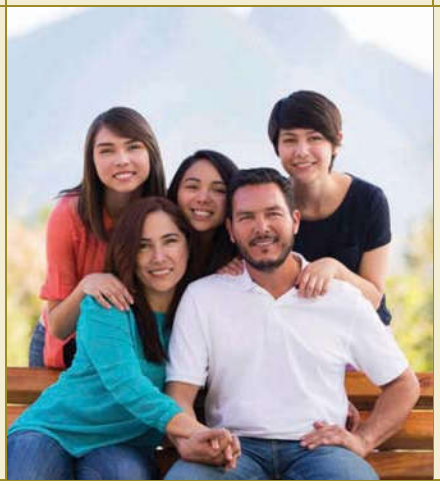
5x + 3y + 2z = 1.000.000

Jika dibaca dengan kalimat sederhana, maka 5 dikali dengan harga per box buah mangga ditambah 3 dikali dengan harga per box buah jeruk dan 2 dikali dengan harga per box buah manggis sama dengan modal awal yaitu Rp 1.000.000,00.

KEGIATAN 1

Pahami soal berikut dengan seksama, selesaikan dan tuliskan di kolom jawaban yang sudah tersedia!

a		Jika, sebuah dadu disamping saya lempar sekali. Berapa banyak kemungkinan yang akan muncul? Angka berapa saja? **Jawab:** _____ _____
b		Suasana hiruk pikuk di Pasar Buah dan sayuran di pasar tradisional. Toko A, Toko B dan Toko C semuanya menjual jeruk mandarin. Jika Pak Zaenal mau membeli jeruk mandarin dari ketiga toko tersebut dengan 5 kg dari toko A, 2 kg dari Toko B dan 7 kg dari Toko C dengan total biaya sebesar Rp 140.000,-. Ubahlah dalam kalimat matematika yang sederhana! (x = harga di toko A, y = harga di toko B, dan z = harga di toko C) **Jawab:** _____ _____
c		Jika, tiga uang logam disamping saya lempar sekali. Berapa banyak kemungkinan yang akan muncul? Lihatlah contoh diatas? **Jawab:** _____ _____

d		Ali, Budi dan Candra akan membeli perlengkapan sekolah di Toko Budiman. Ali membeli 2 pensil, 1 gunting dan 3 buku dengan harga Rp 8.500,00, Budi membeli 1 pensil, 3 gunting dan 2 buku dengan harga Rp 10.000,00 sedangkan Candra membeli 5 pensil dan 2 buku saja dengan harga Rp 8.000,00. Ubahlah kalimat diatas kedalam kalimat matematika yang sederhana! (x = harga pensil, y = harga gunting, dan z = harga buku) **Jawab:** _____ _____
e		Kakak mempunyai umur 4 tahun lebih tua dari adik. Umur Bapak 4 kali lipat dari umur adik. Enam kali umur Kakak sama dengan dua kali umur Bapak. Ubahlah menjadi model matematika! (a = umur adik, b = umur kakak dan c = umur bapak) **Jawab:** _____ _____

UNIT 2 STRATEGI SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran ini adalah untuk menggali materi-materi tentang konsep dari sistem persamaan tiga variabel yang didapatkan dari masalah perdagangan, pengalokasian harga bagrang dan masalah kontekstual sehari-hari lainnya yang disajikan, menemukannya dan menggunakan konsep tersebut untuk penyelesaian soal.

Untuk mendapatkan keuntungan yang memadai, maka harga barang yang ditetapkan harus kompetitif/bersaing atau tidak terlalu jauh dari harga pasar agar tingkat penjualan tetap tinggi. Sehingga perlu ditetapkan sesuai dengan kondisi dan kecenderungan pasar, dengan tetap memperhatikan biaya produksi dan sejenisnya. Biasanya yang perlu dipertimbangkan dalam menetapkan harga jual produk adalah tingkat permintaan, biaya produksi/operasional, tingkat laba/keuntungan yang diharapkan, serta tingkat harga dan persaingan barang sejenis atau barang penggantinya.

Pengetahuan atau konsep matematika banyak diterapkan dalam menentukan harga jual. Jika Anda mempunyai usaha jus buah dan mendapatkan pesanan 100 gelas untuk acara perpi-

sahan. Biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi diperkirakan sebesar Rp 400.000,00. Dengan perincian:

- Biaya bahan baku = Rp 250.000,00
- Biaya tenaga kerja = Rp 100.000,00
- Biaya lain-lain seperti penyusutan alat, sewa empat, dsb Rp 50.000,00

Jika menginginkan laba sebesar 15%, maka Harga Total = Biaya Total + Laba = Rp.400.000,- + (15% x Rp.400.000,-) = Rp.460.000,-. Dengan demikian untuk setiap jus yang anda jual, harganya sebesar Rp.4.600,00.

Contoh yang lainnya, kita mencari harga item buah dari sebuah toko. Budi membeli 3 kg jeruk, 2 kg anggur dan 5 kg melon membayar uang sebesar Rp 129.000,-; Sulaiman ditoko dan hari yang sama membeli 1 kg jeruk, 3 kg anggur dan 2 kg melon membayar uang sebesar Rp 138.000,- sedangkan Zahra membeli 4 kg jeruk, 5 kg anggur dan 3 kg melon dengan biaya sebesar Rp 247.000,-. Jika Pak Anwar mau membeli 10 kg buah jeruk, 10 kg buah anggur, dan 10 kg buah melon di toko tersebut, Berapakah yang harus dibayarkan?

Jika harga 1 kg jeruk dimisalkan dengan variabel/huruf “x”, harga 1 kg anggur dimisalkan dengan variabel/huruf “y” dan harga 1 kg melon dimisalkan dengan variabel/huruf “z”. Dengan permisalan ini diperoleh sebuah kalimat matematika yaitu

Budi : $3x + 2y + 5z$ = Rp 129.000,-

Sulaiman : $x + 3y + 2z$ = Rp 138.000,-

Zahra : $4x + 5y + 3z$ = Rp 247.000,-

Sedangkan, untuk Pak Anwar diperoleh suatu persamaaan sasaran dengan mencari nilai variabel masing-masing yaitu $10x + 10y + 10z$. Kegiatan diatas jika dalam konsep matematika disebut dengan persamaan linear tiga variabel.

Persamaan Linear Tiga variabel (PLTV) adalah persamaan linear yang memiliki tiga variabel. Sedangkan sistem persamaan linear kumpulan dua atau lebih PLTV dengan himpunan variabel yang sama

Adapun bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel dengan x, y dan z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Keterangan:

- Variabel adalah x, y dan z
- Koefisien adalah a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3
- Konstanta adalah d_1, d_2, d_3

Jika d_1, d_2, d_3 masing-masing bernilai nol, maka dinamakan sistem persamaan linear homogen, sedangkan jika tidak semuanya bernilai nol, maka sistem persamaan linearnya dinamakan sistem persamaan linear nonhomogen. Jika $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ memenuhi sistem persamaan tersebut, maka berlaku hubungan:

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$$
$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$$
$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3$$

Pasangan berurutan (x_0, y_0, z_0) disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel dan $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ disebut himpunan penyelesaian. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel, dapat menggunakan tiga metode substitusi dan/atau metode eliminasi

Pembahasan masing-masing metode

1. **Metode Substitusi**

   Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode substitusi, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

   Langkah 1

   Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana kemudian nyatakan salah satu variabel ke dalam dua variabelnya lainnya. Misalkan dipilih persamaan linear kedua dan kita nyatakan x ke dalam variabel y dan z

   Langkah 2

   Substitusikan/masukkan persamaan di langkah 1 kedalam kedua persamaan yang lain sehingga terbentuk sistem persamaan persamaan linear dua variabel yang baru

   Langkah 3

   Selesaikan sistem persamaan persamaan linear dua variabel yang baru untuk menentukan nilai y dan z. Substitusikan kedua nilai ini untuk menentukan nilai x sehingga diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel

Contoh 1:

Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$, dengan menggunakan metode substitusi, tentukan nilai dari x, y dan z!

Jawab:

$$2x + y + z = 7 \quad \text{..... (i)}$$

$$x + 2y - z = 2 \quad \text{..... (ii)}$$

$$3x - y + 2z = 7 \quad \text{..... (iii)}$$

- Persamaaan (i) saya ubah kedalam fungsi x dan z

$$2x + y + z = 7$$

$$y = 7 - 2x - z \quad \text{..... (iv)}$$

- Persamaan (iv) saya substitusikan ke pers. (ii)

$$x + 2y - z = 2$$

$$x + 2(7 - 2x - z) - z = 2$$

$$x + 14 - 4x - 2z - z = 2$$

$$x - 4x - 2z - z = 2 - 14$$

$$-3x - 3z = -12 \text{ (dibagi - 3)}$$

$$x + z = 4$$

$$x = 4 - z \quad \text{..... (v)}$$

- Persamaan (iv) saya substitusikan ke pers. (iii)

$$3x - y + 2z = 7$$

$$3x - (7 - 2x - z) + 2z = 7$$

$$3x - 7 + 2x + z + 2z = 7$$

$$3x + 2x + z + 2z = 7 + 7$$

$$5x + 3z = 14 \quad \text{..... (vi)}$$

- Persamaan (v) disubstitusikan ke persamaan (vi) sehingga diperoleh

$$5x + 3z = 14$$

$$5(4 - z) + 3z = 14$$

$$20 - 5z + 3z = 14$$

$$-2z = 14 - 20$$

$$z = \frac{-6}{-2} \rightarrow z = 3$$

- Substitusikan z = 3 kedalam persamaan (v) sehingga diperoleh

$$x + z = 4$$
$$x + 3 = 4$$
$$x = 4 - 3$$
$$x = 1$$

- Substitusikan x = 1 dan z = 3 kedalam persamaan (i) sehingga diperoleh

$$2x + y + z = 7$$
$$2(1) + y + 3 = 7$$
$$y = 7 - 2 - 3$$
$$y = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya {(1.2.3)}

2. **Metode eliminasi dan substitusi**

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode eliminasi, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

- **Langkah 1**
  Pilihlah variabel mana dari persamaan yang mau dihilangkan atau dieliminasi, misalkan variabel x yang akan dieliminasi. Samakan koefisien x pada persamaan pertama dan persamaan kedua, dengan cari mengalikan persamaan dengan bilangan sehingga tetap ekivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan kedua sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang pertama.
- **Langkah 2**
  Samakan koefisien x pada persamaan pertama dan persamaan ketiga, dengan cari mengalikan persamaan dengan sebuah sehingga tetap ekivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan ketiga sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang kedua.
- **Langkah 3**
  Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang baru sehingga diperoleh nilai y dan z. Substitusikan nilai y dan x ke salah satu persamaan tiga variabel untuk memperoleh nilai x

Contoh 2:

1. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$, dengan menggunakan metode eliminasi, tentukan nilai dari x, y dan z!

   Jawab:

   $2x + y + z = 7$ ..... (i)

   $x + 2y - z = 2$ ..... (ii)

   $3x - y + 2z = 7$ ..... (iii)

   - Eliminasi antara persamaaan (i) dan (ii)

     $$\begin{array}{rl} 2x + y + z = 7 & \\ x + 2y - z = 2 & \\ \hline 3x + 3y = 9 & + \\ x + y = 3 & \text{..... (iv)} \end{array}$$

   - Eliminasi antara persamaan (i) dan (iii)

     $$\begin{array}{lll} 2x + y + z = 7 & |x2| & 4x + 2y + 2z = 14 \\ 3x - y + 2z = 7 & |x1| & \underline{3x - y + 2z = 7} \; - \\ & & x + 3y = 7 \text{ ..... (v)} \end{array}$$

   - Eliminasi antara persamaan (iv) dan pers. (v)

     $$\begin{array}{rl} x + y = 3 & \\ \underline{x + 3y = 7} & - \\ -2y = -4 & \\ y = \frac{-4}{-2} \rightarrow y = 2 & \end{array}$$

     Antara persamaan (v) dan (vi) menggunakan konsep penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, yaitu

     $$\begin{array}{lll} x + y = 3 & |x3| & 3x + 3y = 9 \\ x + 3y = 7 & |x1| & \underline{x + 3y = 7} \; - \\ & & 2x = 2 \\ & & x = \frac{2}{2} = 1 \end{array}$$

- Substitusikan x = 1, y = 2 kedalam persamaan (i) sehingga diperoleh

  $2x + y + z = 7$

  $2(1) + 2 + z = 7$

  $z = 7 - 2 - 2$

  $z = 3$

  Jadi, himpunan penyelesaiannya {(1.2.3)}

Contoh 3:

1. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$, dengan menggunakan metode gabungan, tentukan nilai dari x, y dan z!

   Jawab:

   $2x + y + z = 7$ ..... (i)

   $x + 2y - z = 2$ ..... (ii)

   $3x - y + 2z = 7$ ..... (iii)

   - Eliminasi antara persamaaan (i) dan (ii)

     $2x + y + z = 7$

     $x + 2y - z = 2$ +

     $3x + 3y = 9$

     $x + y = 3$ ..... (iv)

   - Eliminasi antara persamaan (i) dan (iii)

     $2x + y + z = 7$ |x2| $4x + 2y + 2z = 14$

     $3x - y + 2z = 7$ |x1| $3x - y + 2z = 7$ –

     $x + 3y = 7$ ..... (v)

   - Eliminasi antara persamaan (iv) dan pers. (v)

     $x + y = 3$

     $x + 3y = 7$ –

     $-2y = -4$

     $y = \frac{-4}{-2} \rightarrow y = 2$

- Substitusikan y = 2 ke pers. (iv)
  x + y = 3

  x + 2 = 3

  x = 1
- Substitusikan x = 1 dan y = 2 ke pers. (i)
  2(1) + 2 + z = 7

  z = 7 - 2 - 2

  z = 3

  Jadi, himpunan penyelesaiannya {(1.2.3)}

KEGIATAN 1

Penugasan

- Lihatlah langkah-langkah penyelesaian sesuai modul diatas dengan menggunakan metode substitusi, metode eliminasi dan metode campuran.
- Selesaikan permasalahan dibawah dengan langkah-langkah penyelesaian

1. Dengan menggunakan metode substitusi, selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut!

   a. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = 19 \\ + 2y - 5z = 10 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$

2. Dengan menggunakan metode campuran, selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut!

a. $\begin{cases} 3x + 9y - 4z = 10 \\ 2x - 2y + z = -5 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4y + 3z = 13 \\ x - 2y + z = 3 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

a. $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 9 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y + z = 7 \\ 9x + 3y + z = 12 \end{cases}$

UNIT 3

PENYELESAIAN MASALAH YANG TERKAIT DENGAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

Tujuan dari materi pada sub unsur 3 ini adalah peserta didik dapat menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah, dimulai dengan mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan sistem persamaan linear tiga variabel kemudian membuat model matematika serta menyelesaikannya dengan sistem persamaan linear tiga variabel.

Berapa modal yang dibutuhkan?

Pengetahuan dan konsep matematika diperlukan dalam merancang biaya produksi barang. Secara sederhana, biaya pembuatan produk ditentukan oleh biaya tetap (seperti modal, gaji tetap dan sejenisnya) dan biaya variabel untuk membuat produk (seperti upah per produk, biaya bahan per produk, dan sejenisnya). Sehingga fungsi biaya produksi adalah persamaan linear dengan grafik berupa garis lurus. Jadi, usaha yang akan didirikan menyesuaikan dengan modal yang dimiliki. Sedangkan pendapatan usaha ditentukan oleh perkalian jumlah penjualan barang dengan harga barang per unitnya, yang merupakan fungsi linear dengan grafik berupa garis lurus. Setidaknya ada lima hal yang harus diperhatikan dalam mengelola keuangan, yaitu:

1. Pisahkan keuangan pribadi dengan milik perusahaan;
2. Gunakan pembukuan keuangan;
3. Rencanakan dengan baik penggunaan uang;
4. Lakukan putaran pada kas secara efektif;
5. Memastikan perhitungan keuntungan dengan benar.

Secara garis besar, langkah-langkah penyelesaian masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut:

1. Menyatakan atau menerjemahkan masalah ke dalam diagram, tabel, grafik atau bahasa yang mudah kita pahami. Ini adalah problem real.
2. Mengidentifikasi berbagai konsep matematika dan asumsi yang digunakan dan berkaitan dengan masalah. Ini adalah problem matematika.
3. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika yang berkiatan dengan masalah. Ini adalah proses matematisasi.
4. Menyelesaikan model model matematika dengan menggunakan strategi penyelesaian, operasi hitung atau operasi matematika secara tepat. Ini adalah solusi problem matematika.
5. Menafsirkan dan memeriksa kesesuaian dan masuk akalnya jawaban dari model matematika terhadap masalah semula, untuk mendapat solusi dari masalah. Ini adalah solusi dari masalah.

KEGIATAN 1

1. Ubahlah kalimat-kalimat dibawah ini dengan menggunakan bahasa matematika!
2. Kegiatan ini untuk melatih kemampuan dalam mengidentifikasi masalah dan menyusun model matematikanya!
3. Berikut beberapa contoh untuk mengasah kemampuan saudara dalam mengidentifikasi dan menerjemahkan masalah-masalah kontekstual kedalam bahasa matematika.

a		Dari gambar terlihat rak yang berisi buah-buahan. Jika Rina mau membeli beberapa buah yaitu 5 kg buah apel, 2,5 kg buah jeruk dan 3 kg buah anggur dengan uang sebesar Rp 125.000,-. Ubahlah dalam kalimat tersebut dalam kalimat matematika! (x = harga per kg buah apel, y = harga per kg buah anggur dan z = harga per kg buah jeruk)
b		Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan unta apabila dijumlahkan adalah 1.520 hari. Masa kehamilan badak adalah 58 hari lebih lama daripada unta. Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah. Ubahlah dalam kalimat tersebut dalam kalimat matematika! (p = masa kehamilan gajah, q = masa kehamilan badak dan r = masa kehamilan unta)
c		Jika umur ibu, 5 tahun yang akan datang mempunyai umur 3 tahun kurangnya dari 10 kali lipat umur adik yang paling kecil. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk kalimat matematika!

Contoh:

Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak dan 2 kg apel harus membayar Rp 33,000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar sebesar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Berapa harga per kilogram salak, jeruk dan apel?

Jawab:

Misalkan:

x = harga per kilogram jeruk

y = harga per kilogram salak

z = harga per kilogram apel, maka diperoleh model matematika,

$x + 3y + 2z$ = Rp. 33.000,00 ..... (i)

$2x + y + z$ = Rp. 23.500,00 ..... (ii)

$x + 2y + 3z$ = Rp. 36.500,00 ..... (iii)

Untuk memudahkan dalam penyelesaian, biasanya menggunakan metode gabungan/campuran.

- Eliminasi antara pers. (i) dengan pers. (ii) untuk menghilangkan peubah x

  $x + 3y + 2z = 33.000$ |x2| $2x + 6y + 4z = 66.000$

  $2x + y + z = 23.500$ |x1| $2x + y + z = 23.500$

  ——————————— –

  $5y + 3z = 42.500$ ..... (iv)

- Eliminasi antara pers. (i) dan pers. (iii) untuk menghilangkan peubah x

  $x + 3y + 2z = 33.000$

  $x + 2y + 3z = 36.500$

  ——————————— –

  $y - z = -3.500$ ..... (v)

- Eliminasi antara pers. (iv) dan pers. (v)

  $5y + 3z = 42.500$ |x1| $5y + 3z = 42.500$

  $y - z = -3.500$ |x3| $3y - 3z = -10.500$

  $8y = 32.000$

  $y = \frac{32.000}{8} \rightarrow y = 4.000$

- Substitusikan y = 4.000 ke pers. (v)

$$y - z = -3.500$$

$$(4.000) - z = -3.500$$

$$4.000 + 3.500 = z \rightarrow z = 7.500$$

- Substitusikan y = 4.000, z = 7.500 ke pers. (ii)

$$2x + y + z = 23.500$$

$$2x + (4.000) + (7.500) = 23.500$$

$$2x = 23.500 - 11.500$$

$$2x = 12.000$$

$$x = \frac{12.000}{2} \rightarrow x = 6.000$$

Jadi, harga per kilogram salak Rp 6.000,00, harga per kilogram jeruk Rp 4.000,00 dan harga per kilogram apel Rp 7.500,00

KEGIATAN 2

1. Buatlah model matematika dari masalah kontekstual dibawah ini!
2. Selesaikan model matematika tersebut menggunakan langkah-langkah penyelesaian!
   a. Diketahui tempat tisu disamping dibuat dari kerangka dari kawat dengan panjang 48 cm. Kerangka tersebut memenuhi ketentuan khusus. Jika panjang kerangka ditambah tiga kali lebarnya dan dikurangi dua kali tingginya sama dengan 14 cm. Lebar balok ditambah dengan tingginya sama dengan panjang kerangka. Tentukan panjang, lebar dan tinggi balok tersebut.

   b. Pada bulan Agustus pak Ahmad, pak Yudi dan pak Fauzi panen raya untuk buah jeruk. Jika hasil panen jeruk dari pak Fauzi lebih sedikit 15 kg dari pak Ahmad dan lebih banyak dari 15 kg dari pak Yudi. Jumlah hasil panen ketiganya sebanyak 225 kg. Maka hasil panen jeruk dari pak Ahmad adalah ….

c. Seorang ahli kimia mencampur tiga larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45% untuk menghasilkan 10 L larutan glukosa dengan konsentrasi 38%. Jika volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan, tentukan volume masing-masing larutan yang digunakan.

d. Sebuah kotak berisi 58 kartu yang berwarna merah, kuning dan hijau. Dua kali kartu merah ditambah kartu kuning kemudian dikurangi dua kali kartu hijau sama dengan 30. Kartu merah dikurangi dua kali kartu kuning dan ditambah tiga kali kartu hijau sama degan 52. Tentukan banyak kartu pada setiap kotak tersebut.

e. Ibu Ira membeli 5 kg telur, 2 kg daging, dan 1 kg ikan dengan harga Rp 305.000,-. Ibu Budi membeli 3 kg telur dan 1 kg daging dengan harga Rp131.000,-. Ibu Shifa membeli 3 kg daging dan 2 kg ikan dengan harga Rp 360.000,-. Jika ibu Atun membeli 2 kg telur, 1 kg daging, dan 1 kg daging ikan di tempat yang sama, Berapa yang harus dibayar?

LATIHAN

Setelah memahami konsep persamaan linear tiga variabel secara utuh, selesaikanlah soal dibawah ini dengan menyilang jawaban yang menurut saudara benar!

1. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y + z = 7 \\ 9x + 3y + z = 12 \end{cases}$ maka nilai dari x - y- z = ...
   a. 16
   b. 6
   c. –2
   d. – 6
   e. – 12

2. Nilai dari x + y + z sistem persamaan $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 9 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$ adalah ….
   a. 2
   b. 3

c. 4
d. 9
e. 11

3. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} p + 2q - 3r = -7 \\ 2p - q + r = 5 \\ 3p - q + 2r = 8 \end{cases}$ adalah $\{(p_0, q_0, r_0)\}$. Nilai dari $q_0 - r_0$ = ….
   a. – 3
   b. – 2
   c. – 1
   d. 1
   e. 3

4. Nilai dari (x + y + z) sistem persamaan $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y - 3z = -9 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$ adalah ….
   a. 1
   b. 3
   c. 5
   d. 6
   e. 9

5. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = -3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 2 \end{cases}$. Nilai dari x + y + z = ….
   a. 3
   b. 2
   c. 1
   d. $\frac{1}{2}$
   e. $\frac{1}{3}$

Rangkuman

1. Persamaan linear tiga variabel merupakan persamaan linear yang memiliki atau memuat 3 jenis variabel. Bentuk umum persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai ax + by + cz = d, di mana a, b, c konstan dengan a, b, dan c tidak keduanya nol

2. Dua atau lebih persamaan linear tiga variabel dengan jenis variabel yang sama dapat membentuk sistem persamaan linear tiga variabel. Bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

3. Pasangan terurut (a, b, c) adalah penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel apabila nilai a, b dan c disubtitusikan ke dalam setiap persamaan menghasilkan pernyataan yang benar.

4. Prinsip yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel adalah mengubahnya ke bentuk persamaan lain yang lebih sederhana dan setara. Jadi, strategi penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel adalah mengubahnya sehingga terbentuk sistem persamaan linear dua variabel baru pertama (yang lebih sederhana). Selanjutnya, persamaan linear dua variabel baru tersebut diubah sehingga terbentuk persamaan linear satu variabel baru yang kedua. Penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan metode subtitusi, metode eliminasi, dan/atau operasi baris.

5. Secara umum, langkah-langkah penyelesaian masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut:
   a. Menyatakan atau menerjemahkan masalah ke dalam diagram, tabel, grafik atau bahasa yang mudah kita pahami. Ini adalah problem real.
   b. Mengidentifikasi berbagai konsep matematika dan asumsi yang digunakan dan berkaitan dengan masalah. Ini adalah problem matematika.
   c. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika yang berkiatan dengan masalah. Ini adalah proses matematisasi.
   d. Menyelesaikan model model matematika dengan menggunakan strategi penyelesaian, operasi hitung atau operasi matematika secara tepat. Ini adalah solusi problem matematika.
   e. Menafsirkan dan memeriksa kesesuaian dan masuk akalnya jawaban dari model matematika terhadap masalah semula, untuk mendapat solusi dari masalah. Ini adalah solusi dari masalah.

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas X SMA/SMK, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

LPPI dan BI.2015.Profil Bisnis Usaha Mikro, Kecil dan Mengengah (UMKM). Hal:1- 100.http://www.bi.go.id/id/umkm/ penelitian/nasional/kajian/Docume nts/ Profil%20Bisnis%20UMKM.p df (diakses 22/1/2017).

http://file.upi.edu/Direktori/Jurnal/Pendidikan_Dasar/Nomor_14-Oktober_2010/Konsep_pembelajaran_pada_materi_peluang_guna_meningkatkan_kemampuan_pemecahan_masalah.pdf

http://www.ilmu-ekonomi-id.com/2016/12/4-metode-penetapan-harga.html

https://rizkyamanda012.wordpress.com/2010/10/23/bisnis-buah-buahan/ (25-10-2017 jam 02.30)

http://www.investasiuntung.com/2016/08/rincian-modal-usaha-jus-buah.html (25-10-2017 jam 03.29)

https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/4/ (25-10-2017 jam 10.56)

https://www.scribd.com/doc/273902415/MAT-Peminatan-Soal-Cerita-SPLDV-Dan-SPLTV-Beserta-Penyelesaiannya-Riesz-R-R-23 (25-10-2017 jam 21.50)

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 3

Kartu Tanda Penduduk Elektronik/e-KTP

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Matematika Paket C Tingkatan V Modul Tema 3
Modul Tema 3 : Kartu Tanda Penduduk Elektronik/e-KTP

- Penulis: Rain Adhistya

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
  Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
  Kebudayaan, 2018

iv+ 36 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

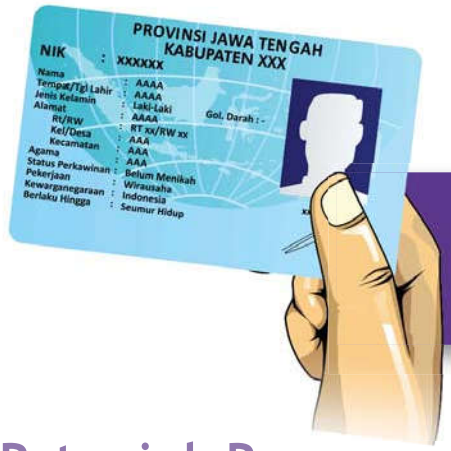
Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar ii
Daftar Isi iii
Petunjuk Penggunaan Modul 1
Tujuan Pembelajaran Modul 1
Pengantar Modul 2
UNIT 1 KONSEP RELASI DAN FUNGSI 4
Kegiatan 1 8
Kegiatan 2 9
A. Jenis-jenis Fungsi 12
UNIT 2 OPERASI DAN KOMPOSISI FUNGSI 16
Kegiatan 1 20
Kegiatan 2 21
Kegiatan 3 23
Kegiatan 4 24
A. Invers Fungsi 25
Kegiatan 5 29
Kegiatan 6 30
B. Pengayaan: Invers Fungsi Trigonometri 31
Rangkuman 32
Kriteria Pindah Modul 33
Saran Referensi 34
Daftar Pustaka 34



E-KTP

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini mengulas tentang penerapan konsep fungsi sebagai pemetaan seperti pemetaan identitas penduduk melalui program E-KTP (KTP elektronik) serta permasalahan sehari-hari lainnya yang berkaitan dengan fungsi. Pembahasan diawali dengan menggali dan menemukan konsep tentang relasi dan fungsi, menemukan notasi fungsi, daerah asal, daerah hasil serta sketsa grafik dari fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional, rancangan pengembangan pemahaman fungsi komposisi dan fungsi invers menggunakan contoh prosedur penyusunan E-KTP serta maslah lainnya yang relevan. Selanjutnya, mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan fungsi komposisi dan fungsi invers, membuat model matematikanya serta menyelesaikannya

Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.

Tujuan Pembelajaran Modul

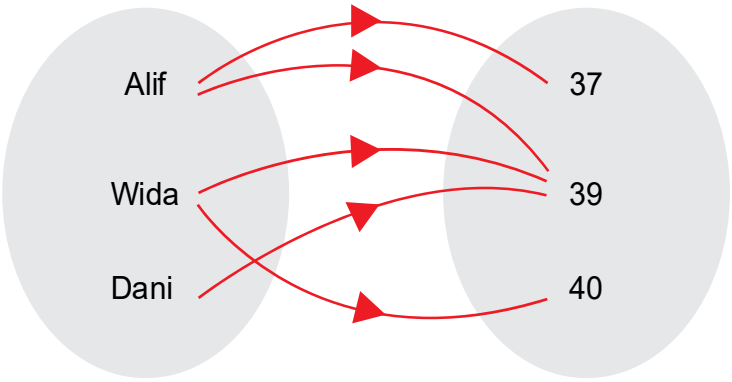
Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

1. Memahami konsep, operasi dan karakteristik relasi dan fungsi dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari

2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan fungsi serta penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan ekonomi dan masalah lainnya sehari-hari

Pengantar Modul

Setiap orang tentu memiliki ukuran sepatu, kemeja, atau celana masing-masing. Misalnya, ukuran sepatu Alif adalah 37, Wida adalah 39, Dani adalah 41, Kiki dan Hasan adalah 40. Setiap orang memiliki ukuran unik (tunggal) dan beberapa orang bisa memiliki ukuran sepatu yang sama, misalnya Kiki dan Hasan. Tetapi, tidak ada orang yang memiliki ukuran sepatu lebih dari satu. Kita menyatakan hubungan atau relasi ini sebagai fungsi dan dapat digambarkan pada diagram panah berikut.



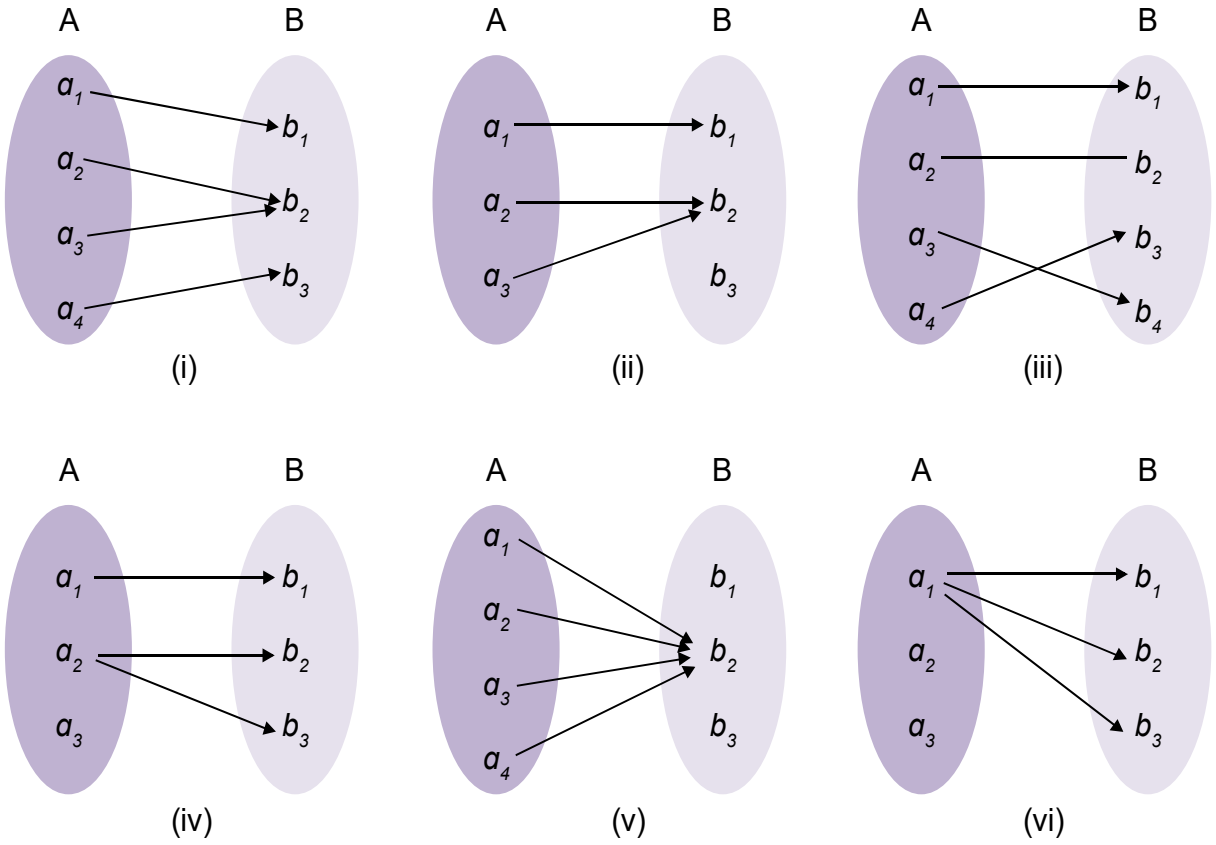
Hubungan tersebut dapat pula dituliskan dalam bentuk pasangan terurut: (Alif, 37), (Wida, 39), (Hasan, 40), (Kiki, 40), dan (Dani, 41). Banyak kejadian lain yang berupa fungsi misalnya: ukuran tubuh dengan ukuran kemeja, siswa di kelasmu dengan nilai matematika, sebuah senapan dengan daerah sasarannya. Demikian juga dengan adanya program E-KTP, di mana setiap orang memiliki nomor induk kependudukan (NIK) yang tidak sama dengan orang lain. Hubungan NIK dengan individu seseorang merupakan fungsi pemetaan yang informasi kependudukan orang yang bersangkutan.

Dengan e-KTP diharapkan seseorang tidak lagi berpeluang memiliki lebih dari satu KTP karena telah menggunakan sistem basis data terpadu yang menghimpun data penduduk dari seluruh Indonesia. Pembahasan dimulai pengertian pengertian relasi dan fungsi, notasi, daerah asal dan daerah hasil, jenis dan sifat fungsi dengan menggunakan peristiwa kontekstual sehari-hari; sketsa dan karakteristik grafik fungsi. Selanjutnya, dibahas tentang operasi aljabar fungsi, komposisi dan invers fungsi. Peta konsep dari materi pelajaran ini dapat digambarkan sebagai berikut.

UNIT 1 KONSEP RELASI DAN FUNGSI

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran ini adalah untuk menggali informasi dan mengidentifikasi tentang konsep relasi dan fungsi yang didapatkan dari masalah-masalah kontekstual yang disajikan. Menentukan notasi fungsi, daerah asal, daerah hasil, ekspresi simbolik fungsi, serta skesta grafik fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional dengan menggunakan contoh dan peristiwa konstekstual.

Sekarang perhatikan relasi atau anggota himpunan A ke himpunan B pada diagram panah berikut



Relasi pada gambar (i) adalah fungsi atau pemetaan, yaitu semua anggota di himpunan A mempunyai teman atau dipasangkan dengan anggota di himpunan B. Jenisnya adalah fungsi surjektif, yaitu semua anggota di himpunan B mendapatkan teman atau pasangan dari A (tidak ada yang terlewat)

Relasi pada gambar (ii) dan (v) adalah fungsi/pemetaan. Jenisnya adalah fungsi injektif, karena ada satu anggota di himpunan B tidak mendapatkan teman atau pasangan dari A (ada yang terlewat)

Relasi pada gambar (iii) adalah fungsi/pemetaan. Jenisnya adalah fungsi bijektif (satu-satu), karena semua anggota di himpunan B mendapatkan satu teman atau pasangan dan hanya satu.

Relasi pada gambar (iv) bukan fungsi/pemetaan. Terdapat anggota di himpunan A yang tidak mempunyai teman atau dipasangkan dengan anggota di himpunan B

Relasi pada gambar (vi) bukan fungsi/pemetaan. Terdapat anggota di himpunan A yang tidak mempunyai teman atau dipasangkan dengan anggota di himpunan B

Apabila antara anggota A dan anggota B tidak ada hubungan, maka himpunan A dan B tidak berelasi.

Fungsi adalah pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dimana suatu relasi khusus dengan setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota dari B. Konsep satu orang satu NIK atau one person one number, jika dihubungkan dengan konsep yang ada di matematika merupakan dasar dari konsep pemetaan atau “fungsi”, yaitu setiap orang hanya mempunyai satu Nomor Induk Kependudukan berarti setiap warga negara hanya mempunyai satu anggota saja atau satu kartu saja dan tidak bisa mempunyai nomor ganda.

Definisi 1

Relasi adalah suatu hubungan dari himpunan A ke himpunan B

Definisi 2

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B dengan meng-awankan setiap anggota himpunan A tepat dengan satu anggota dari himpunan B

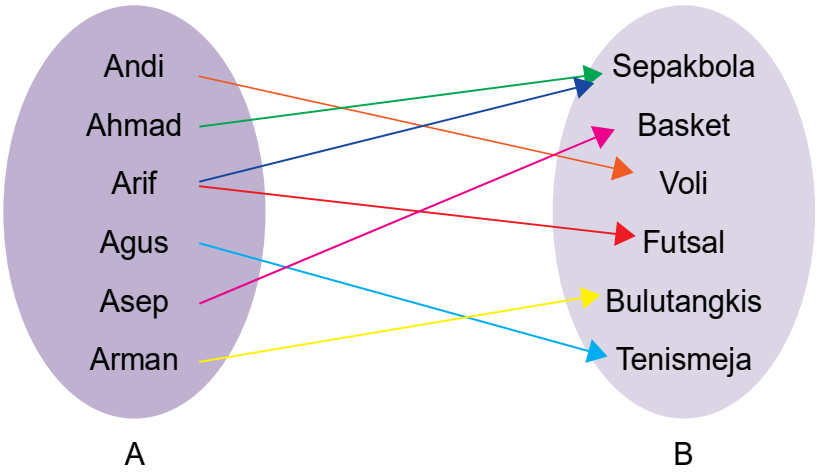
Dari dua definisi diatas, bisa kita katakan dengan cara yang sederhana “setiap fungsi pasti merupakan relasi, namun setiap relasi belum tentu merupakan fungsi”.

Contoh 1

Misalkan A = {Andi, Ahmad, Arif, Agus, Asep, Arman} dan B = {sepakbola, basket, voli, futsal, bulutangkis, tenis meja}. Olahraga sepakbola disukai oleh Ahmad dan Arif, olahraga basket disukai Asep, olahraga voli disukai oleh Andi, olahraga Futsal digemari oleh Arif, olahraga bulutangkis disukai Arman dan yang menyukai tenismeja adalah Agus. Jika relasi antara himpunan A ke himpunan B dinyatakan dalam “hobi”. Tunjukkan dalam diagram panah relasi tersebut dan dalam himpunan pasangan berurutan !

Jawab

Berikut relasi “hobi” dan dijabarkan dalam diagram panah dibawah ini



Dari diagram panah diatas, diperoleh himpunan pasangan berurutan = {(Andi, Voli), (Ahmad, Sepakbola), (Arif, Sepakbola), (Arif, Futsal), (Agus, Tenismeja), (Asep, Basket), (Arman, Bulutangkis)}

Contoh 2

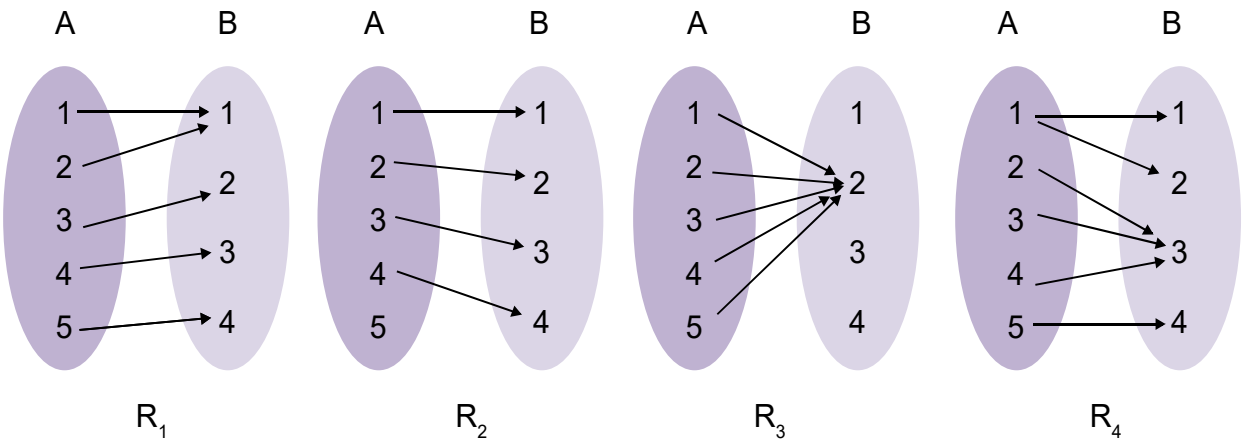
Diketahui himpunan-himpunan A = {1,2,3,4,5} dan B = {1,2,3,4}. Relasi-relasi berikut ini adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B.

a) R1 = {(1,1), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4)}
b) R2 = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}
c) R3 = {(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2)}
d) R4 = {(1,1), (1,2), (2,3), (3,3), (4,3), (5,4)}

Dari relasi-relasi diatas, manakah yang merupakan fungsi dan manakah yang bukan merupakan fungsi?

Jawab

Dari keempat relasi, akan dijabarkan diagram panahnya masing-masing



Kita analisis satu persatu,

- R1 termasuk dalam kategori fungsi/pemetaan, karena semua anggota di himpunan A mempunyai teman di himpunan B.
- R2 bukan termasuk fungsi/pemetaan, karena ada anggota di himpunan A yang tidak mempunyai teman di himpunan B namun bisa dikatakan relasi.
- R3 termasuk dalam kategori fungsi/pemetaan, karena semua anggota di himpunan A mempunyai teman di himpunan B.
- R4 bukan termasuk fungsi/pemetaan, karena ada anggota di himpunan A yang mempunyai teman lebih dari satu di himpunan B namun bisa dikatakan relasi..

KEGIATAN 1

Pahami beberapa masalah dibawah ini, kemudian selesaikan menurut pemahaman saudara!

1. Misalkan A adalah himpunan dari semua warga belajar di Paket C yang ada ditempat saudara, dan B = {motor, angkot, bus, sepeda, jalan kaki}. Buatlah relasi “ke tempat belajar dengan” dari himpunan A ke himpunan B dengan menggunakan diagram panah.
2. Carilah nama-nama teman sebanyak 5 warga belajar yang mengikuti program Paket C ditempat saudara. Misalkan A adalah himpunan nama-nama teman saudara tadi, dan B = {1, 2, 3, 4, 5}. Buatlah
   a. Diagram panah dengan relasi “anak nomor ke” dari himpunan A ke himpunan B
   b. Tulislah relasi tersebut sebagai pasangan terurut
3. Dari gambar disamping, sampaikan pendapat saudara dalam sebuah diagram panah, kegemaran masing-masing teman-teman saudara di Program Paket C sesuai dengan tampilan gambar makanan disamping.

Jika suatu fungsi diberi nama *f*, maka fungsi tersebut ditulis dengan lambang atau notasi sebagai berikut.

$f : A \rightarrow B$ (dibaca: *f* memetakan A ke B)

Aturan yang menghubungkan unsur-unsur dalam himpunan A dengan unsur-unsur dalam himpunan B tidak diperlihatkan. Jika f memetakan $a \in A$ ke $p \in B$, dikatakan “p adalah peta a oleh f” dan ditulis f (a) = p dan jika f memetakan $b \in$ A ke $q \in B$, dikatakan “q adalah peta b oleh f” dan ditulis f (b) = q.

Peta dari $x \in A$ oleh fungsi f sering dituliskan sebagai f(x) dan bentuk f(x) disebut rumus atau notasi bagi fungsi f. Sebagai contoh fungsi $f : x \rightarrow x2 – 2x + 3$ dapat dinyatakan.

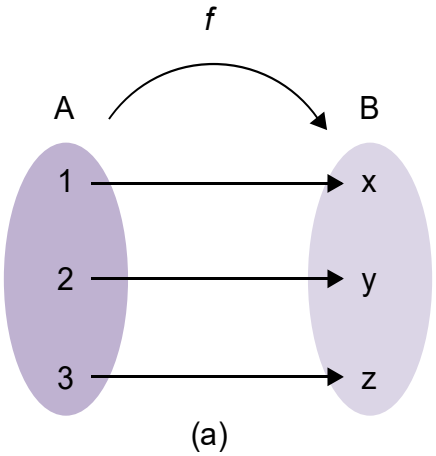
a. Rumus untuk fungsi f adalah $f(x) = x2 – 2x + 3$ dengan $x \in R$.
b. Peta dari 0 adalah $f(0) = (0)2 – 2(0) + 3 = 3$,
   Peta dari 1 adalah $f(1) = (1)2 – 2(1) + 3 = 2$,

   Peta dari 2 adalah $f(2) = (2)2 – 2(2) + 3 = 3$, … dan seterusnya.

   Ingat bahwa f(0) adalah nilai fungsi f(x) untuk x = 0. Jadi, secara umum $f(a) = a2 – 2a + 3$ adalah nilai fungsi f untuk x = a.

c. Grafik fungsi *f* digambarkan dengan persamaan y = x2 – 2x + 3

Dalam fungsi atau pemetaan dikenal tiga daerah atau wilayah, yaitu: daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain*) dan daerah hasil (*range*). Secara sederhana untuk membedakan manakah domain, kodomain dan range dari contoh dibawah ini.



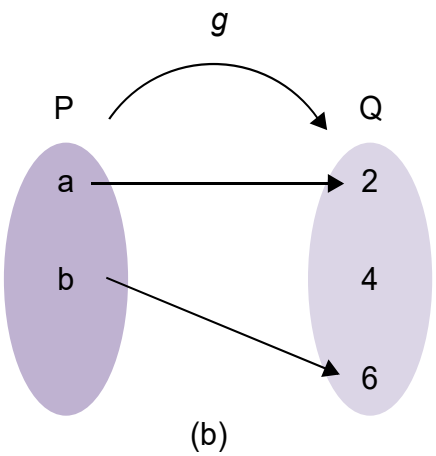
(a)

Fungsi $f : A \rightarrow B$

Domain : $D_f = \{1, 2, 3\}$

Kodomain : $K_f = \{x, y, z\}$

Range : $R_f = \{x, y, z\}$



(b)

Fungsi $g : P \rightarrow Q$

Domain : $D_g = \{a, b\}$

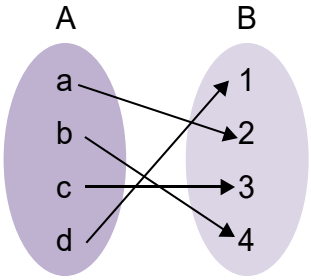
Kodomain : $K_f = \{2, 4, 6\}$

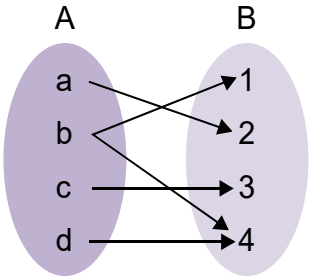
Range : $R_f = \{2, 6\}$

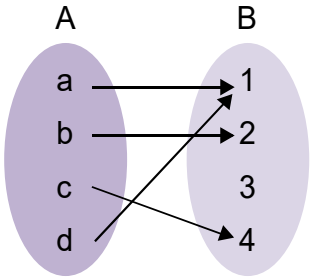
KEGIATAN 2

Pahami soal berikut dengan seksama, selesaikan dan tuliskan di kolom jawaban yang sudah tersedia!

1. Dari diagram panah berikut. Manakah yang merupakan fungsi?







2. Diketahui A = {1, 2, 3, 4} dan B = {a, b, c}. Apakah relasi-relasi dari A ke B berikut merupakan fungsi? Jika tidak coba selidiki mengapa?
   a. R_1 = {(1, a), (3, b), (4, c)}
   b. R_2 = {(1, c), (2, b), (3, c), (4, c)}
   c. R_3 = {(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)}
   d. R_4 = {(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)}
3. Fungsi f: R R ditentukan dengan f(x) = 2x
   a. Tentukan nilai dari f(0), f(1), f(-2) dan f(2)
   b. Tentukan nilai a jika f(a) = 12
4. Gambarkan diagram panah dari pasangan berurut berikut.
   a. (3,4), (4, 5), (2, 6), dan (7, 8)
   b. (a, b), (c, d), (e, b), dan (k, f)
   c. (1, b), (2, b), (3, c), dan (4, c)

   Manakah yang merupakan fungsi? Jelaskan.
5. Berikut adalah daftar harga berbagai barang.

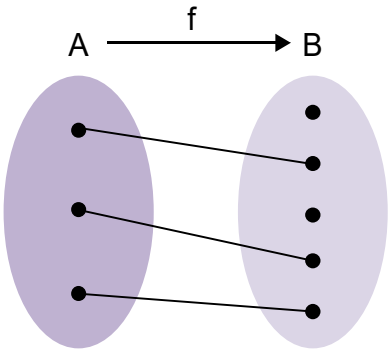
No	Nama Barang	Harga
1	Penghapus	Rp 550,00
2	Buku	Rp 750,00
3	Pensil	Rp 550,00
4	Penggaris	Rp 750,00
5	Busur derajat	Rp 910,00
6	Jangka	Rp 1310,00

   a. Nyatakan nama barang dan harga dalam diagram panah dan pasangan terurut.
   b. Apakah diagram tersebut berupa fungsi? Jelaskan
6. Sebuah fungsi dapat pula digambarkan dalam bidang koordinat. Gambarkan pasangan terurut berikut dalam bidang koordinat.
   a. (-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), dan (-4, 4)
   b. (6, 3), (4, 1), (2, -1), dan (0, -3)
   c. (-1, 3), (-2, 1), (-3, -3), dan (-4, -5)
7. Sebuah studi menunjukkan bahwa prestasi siswa berkaitan dengan waktu yang digunkannya untuk belajar di rumah. Hubungan tersebut adalah (2, 85), (3, 90), dan (1, 76). Apakah hubungan ini sebuah fungsi? Jelaskan.
8. Sebuah penelitian menemukan bahwa terdapat hubungan antara jumlah aspirin yang diminum seseorang pasien dengan waktu demam flunya. Hubungan tersebut adalah (2, 3), (2, 5), 3, 4), dan (3, 5). Apakah hubungan ini sebuah fungsi? Jelaskan.

Sifat-sifat fungsi terbagi menjadi menjadi 3 sifat yaitu sifat injektif, sifat surjektif dan sifat bijektif.

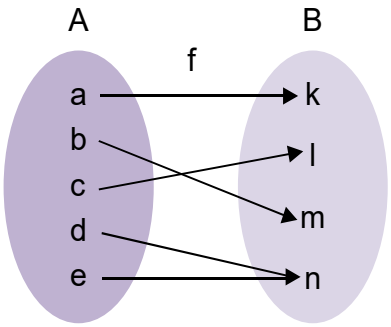
1. **Fungsi Satu-satu (injektif atau Into)**

   Fungsi f dari A ke B merupakan fungsi injektif jika dua unsure berbeda di A dipasangkan dengan tepat satu unsur yang berbeda pula di B. Dengan kata lain fungsi f merupakan fungsi injektif jika $x_1.x_2 \in D_f$ dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. D_f daerah asal fungsi f. Sebagai contoh diagram berikut.



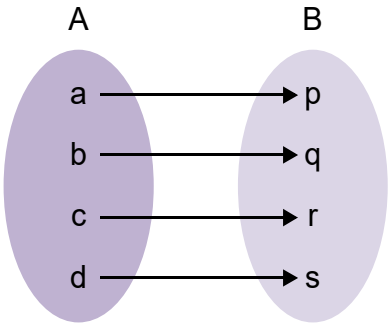
2. **Fungsi Pada (Surjektif atau Onto)**

   Fungsi f dari A ke B merupakan fungsi surjektif jika daerah hasilnya sama dengan daerah kawannya (R_f = B). Sebagai contoh diagram berikut



3. **Fungsi Korespondensi Satu-satu (Bijektif)**

   Suatu fungsi dikatakan bijektif jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Sebagai contoh diagram berikut



Misalkan fungsi f(x) dan fungsi g(x) masing-masing dengan daerah D_f dan D_g, maka

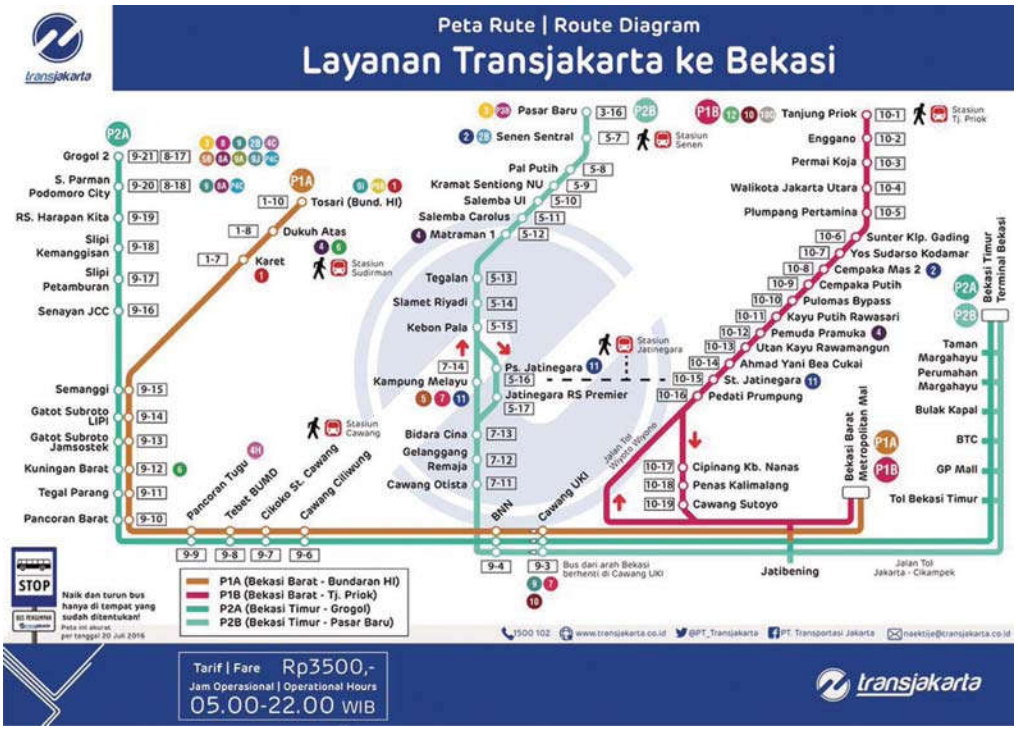
- Jumlah fungsi f(x) dan fungsi g(x) adalah $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Selisih fungsi f(x) dan fungsi g(x) adalah $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- Perkalian fungsi f(x) dan fungsi g(x) adalah $(f\ g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f.g} = D_f \cap D_g$
- Pembagian fungsi f(x) dan fungsi g(x) adalah $(\frac{f}{g})(x) = (\frac{f(x))}{(g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$
- Perpangkatan f(x) dengan pangkat n adalah $f^n(x) = [f(x)]^n$

Jenis-jenis Fungsi

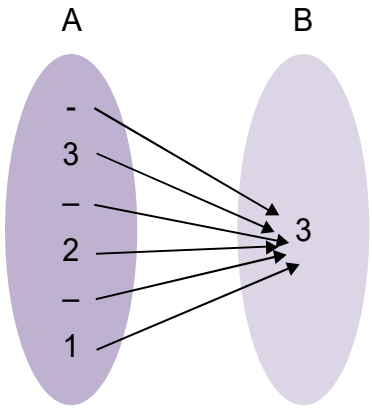
Terdapat berbagai jenis fungsi. Di antaranya adalah sebagai berikut

1. Fungsi Konstan

Dalam kehidupan sehari-hari sebenarnya ada yang menggunakan prinsip dari fungsi kosntan.

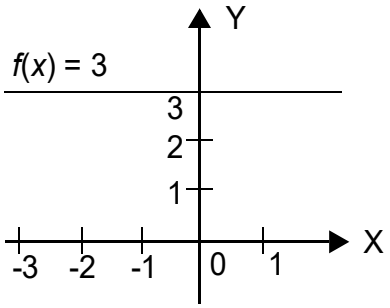


Layanan angkutan umum yang mengantarkan semua orang dengan tarif yang sama semua, tanpa melihat jarak dekat maupun jauh. Semua terintegrasi menjadi satu biaya yaitu sebesar Rp. 3.500,-. Ini yang dinamakan konsep dari fungsi konstan, seperti gambar dan diagram berikut



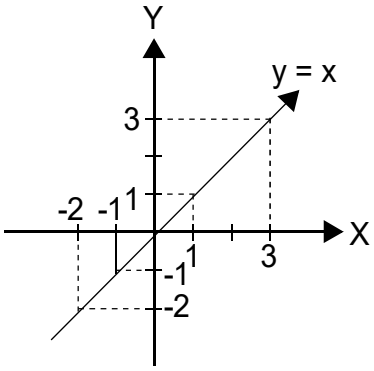
x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	3	3	3	3

Grafik



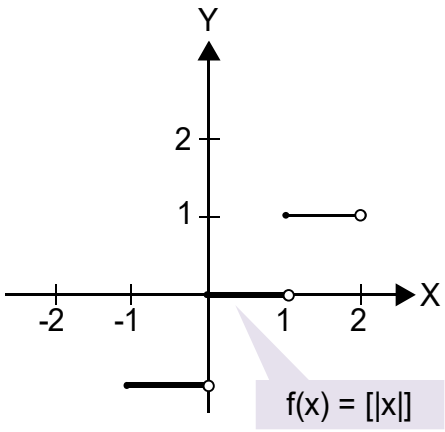
2. Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah fungsi y = f(x) dengan f(x) = x untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Fungsi identitas ditunjukkan dalam gambar berikut ini.



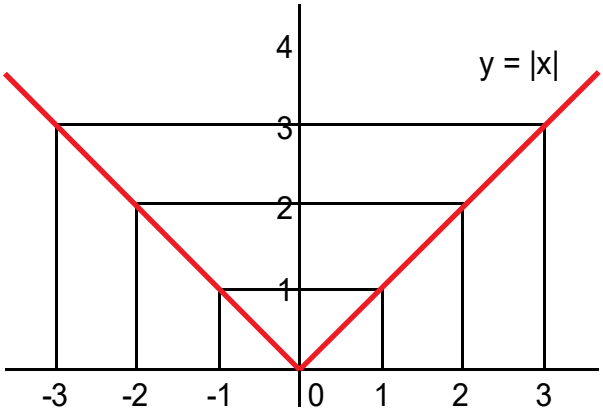
3. Fungsi Tangga atau bilangan bulat terbesar

Fungsi tangga atau fungsi bilangan bulat terbesar adalah fungsi y = f(x) dengan f(x) = ⟦x⟧ untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Bentuk ⟦x⟧ dibaca sebagai “nilai bulat terbesar x”. Fungsi bilangan bulat terbesar ditunjukkan dalam gambar berikut ini.



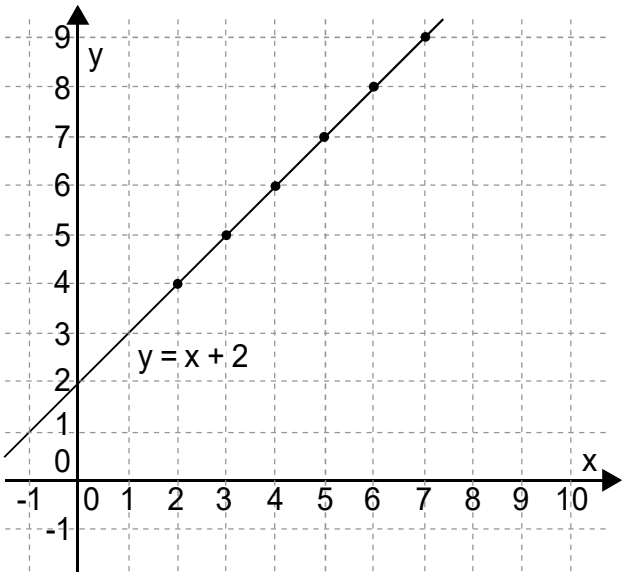
4. Fungsi Modulus

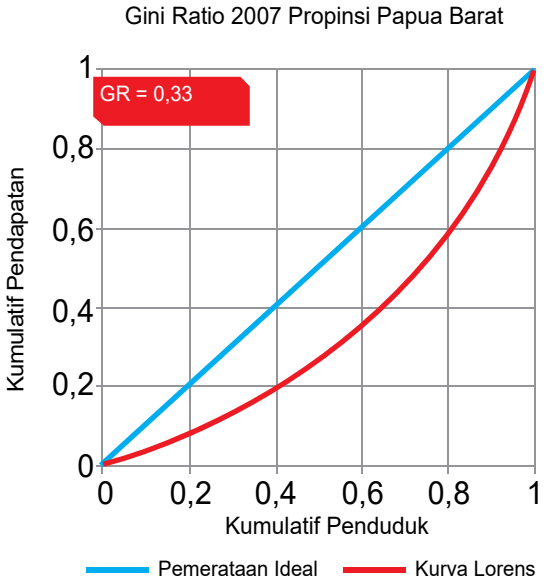
Fungsi modulus atau fungsi nilai mutlak adalah fungsi y = f(x) dengan f(x) = |x| untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Bentuk |x| dibaca sebagai “nilai mutlak x”. Fungsi modulus atau nilai mutlak ditunjukkan dalam diagram berikut ini.



5. Fungsi linear

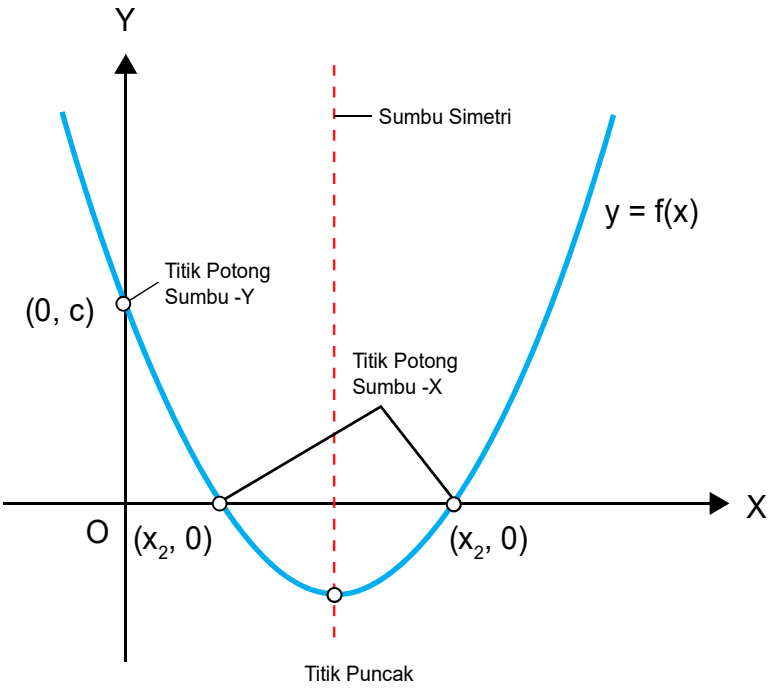
Fungsi linear ada;ah fungsi y = f(x) dengan f(x) = ax + b (a dan b $\in$ R, a $\neq$ 0) untuk semua x dalam daerah asalnya. Grafik fungsi y = f(x) = ax + b dalam bidang Cartesius berupa garis lurusyang tidak sejajar dengan sumbu x dan sumbu y. Secara sederhana diitunjukkan dalam gambar dibawah ini.





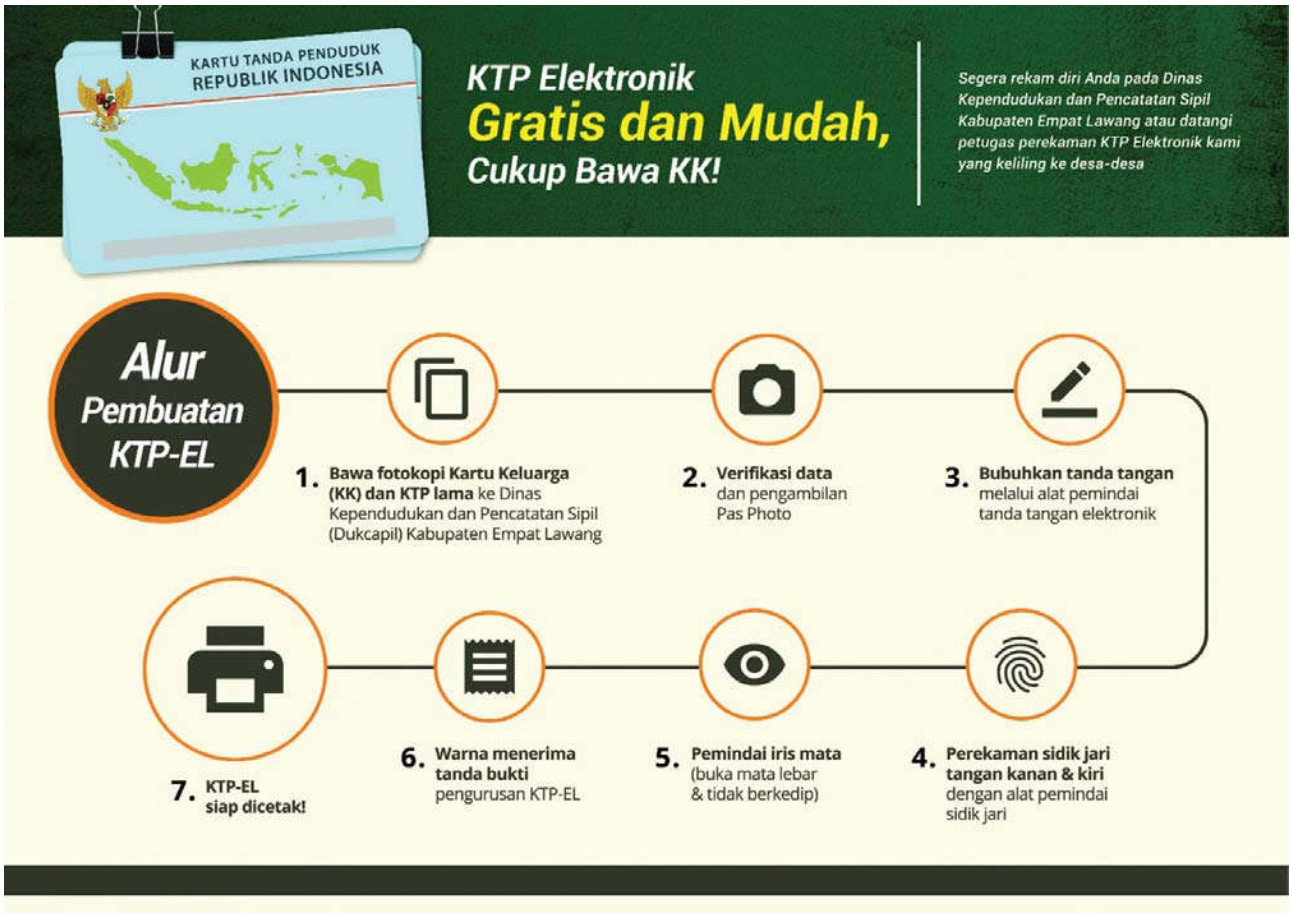
6. Fungsi kuadrat

Fungski kuadrat adalah fungsi y = f(x) = ax2 + bx + c (a, b dan c ∈ R, a ≠ 0) untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Bentuk fungsi kuadrat ditunjukkan dalam gambar dibawah ini



UNIT 2 OPERASI DAN KOMPOSISI FUNGSI

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran ini adalah untuk menggali materi-materi tentang konsep komposisi dan invers kemudian operasi-operasi pada fungsi komposisi dan invers beserta sifat-sifatnya dengan menggunakan contoh seperti prosedur pengajuan E-KTP, peristiwa kontekstual, serta masalah sehari-hari lainnya, menemukan dan menggunakan konsep tersebut dalam menyelesaikan soal.



Komposisi atau operasi fungsi secara umum dilakukan untuk menghasilkan nilai tertentu setelah melalui tahapan/prosedur operasi tertentu. Hal ini banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, misalkan tata cara mandi tahapan adalah melepas baju baru dilanjutkan dengan mandi, jika dibalik akan berbeda hasilnya.

Demikian juga dalam membuat e-KTP yang valid atau absah bagi seseorang, dilakukan dengan operasi atau prosedur tertentu misalnya pemeriksaan berkas pengajuan, pengisian data

kependudukan, pengambilan foto, tanda tangan, sidik jari dan retina mata, dan pencetakan KTP. Apabila prosedur terbalik atau terlewati, tentu akan berbeda hasilnya. Hal yang serupa juga berlaku untuk penyusunan KK, SIM, STNK, dan sebagainya yang merupakan penerapan konsep dari fungsi komposisi

Walaupun fungsi bukan bilangan, namun kita dapat melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, maupun operasi perpangkatan dan penarikan akar. Misalkan $f(x) = (x - 3)/2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, maka kita dapat mendefinisikan fungsi baru:

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 3)/2 + \sqrt{x}$, daerah asal dari f + g merupakan irisan dari daerah asal f dan g, yaitu $D_{f+g} = Df \cap Dg$

(2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 3)/2 - \sqrt{x}$, daerah asal dari f – g merupakan irisan dari daerah asal f dan g, yaitu $D_{f+g} = Df \cap Dg$

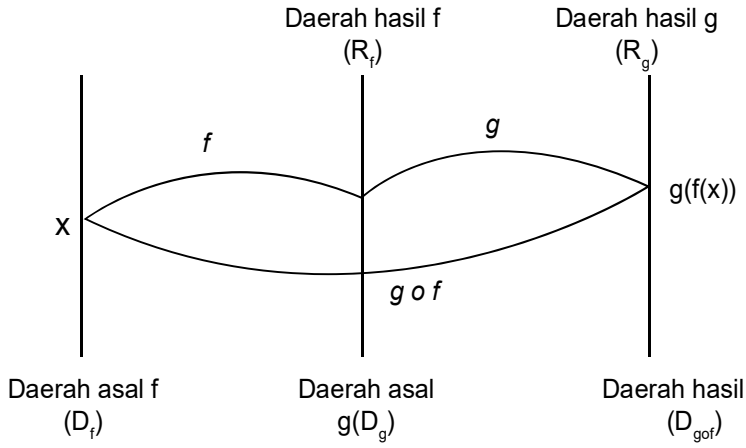
(3) $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = [(x - 3)/2]/\sqrt{x} = (x - 3)/(2\sqrt{x})$, daerah asal dari f/g merupakan irisan dari daerah asal f dan g dan $g \neq 0$, yaitu $D_{f+g} = Df \cap Dg - \{0\}$

Apabila fungsi f diibaratkan sebuah senapan, maka daerah asalnya adalah peluru dan daerah hasilnya adalah sasaran tembak. Tidak mungkin satu peluru mengenai beberapa sasaran berbeda, tetapi satu sasaran dapat dikenai beberapa peluru. Demikian juga dengan fungsi y = f(x), satu nilai $x \varepsilon Df$ dikaitkan atau dipasangkan dengan nilai unik dari $y \varepsilon Rf$. Inilah yang membedakan fungsi dengan relasi lainnya.

Sekarang, jika f diibaratkan dengan mesin, maka fungsi f menerima masukan x dan menghasilkan keluaran berupa f(x). Kita dapat menciptakan beberapa mesin yang bekerja bersama. Misalnya, f menerima masukan x, menghasilkan f(x) dan fungsi g menerima f(x) dan menghasilkan g[f(x)]. Dikatakan, kita telah menyusun g dengan f. Fungsi yang dihasilkan disebut komposit g dengan f, dinyatakan dengan g o f (dibaca"g noktah f atau g o f"). Jadi, dapat didefinisikan

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Bagaimana dengan daerah asal dari fungsi komposisi? Perhatikan diagram berikut.



Dari gambar berikut, jelas bahwa daerah definisi dari g o f, $D_{g \circ f} = Rf \cap Dg$.

Dengan demikian, komposisi fungsi g o f dapat didefinisikan apabila $D_{g \circ f} = Rf \cap Dg \neq \phi$.

Apabila f(x) = (x – 3)/2 dan g(x) = $\sqrt{x}$, maka D_f = R; R_f = R dan D_g = [0, ∞); R_g = [0, ∞)

(g o f)(x) = g[f(x)] = g[(x – 3)/2] = $\sqrt{\frac{x-3}{2}}$

(f o g)(x) = f[g(x)] = f( ) = (- 3)/2

Sehingga $D_{g\,o\,f}$ = Rf ∩ Dg = R ∩ [0, ∞) = [0, ∞) dan

$D_{f\,o\,g}$ = Rg ∩ Df = [0, ∞) ∩ R = [0, ∞).

Tampak jelas bahwa g o f ≠ f o g.

Contoh 1

Jika f fan g dinyatakan dengan rumus fungsi f(x) = x^2 dan g(x) = x + 1. Tentukan rumus untuk fungsi (f o g)(x) dan (g o f)(x)

Jawab

a. (f o g)(x) = f(g(x))
= f(x + 1)
= $(x + 1)^2$
= $x^2 + 2x + 1$

b. (g o f)(x) = g(f(x))
= g(x^2)
= $x^2 + 1$

Contoh 2

Diketahui fungsi f dan fungsi g dengan himpunan pasangan berurutan berikut.

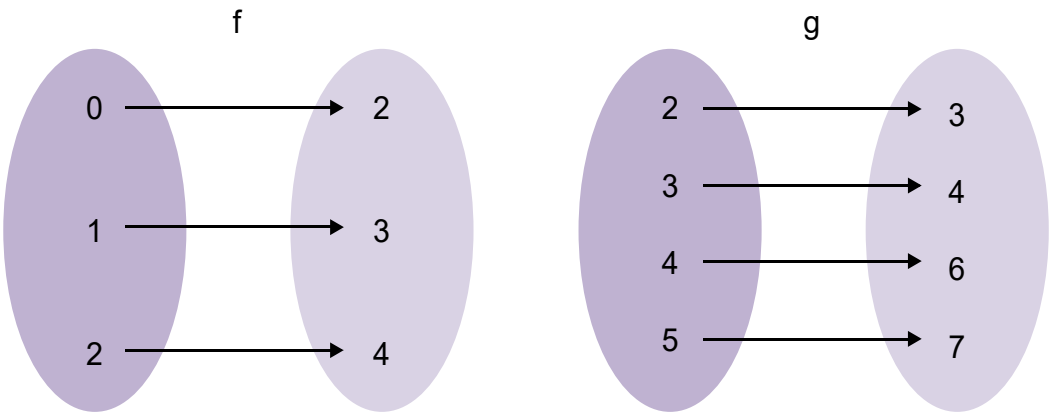
f = {(0,2), (1,3), (2,4)}

g = {(2,3), (3,4), (4,6), (5,7)}

Tentukan g o f dan (g o f)(2)

Jawab

➢ Langkah pertama, lihatlah fungsi f kemudian hasilnya dimasukkan ke fungsi g. Untuk lebih jelasnya bisa dilihat dalam diagram panah dibawah ini



Terlihat jalur dari 0 → 2 kemudian 2 → 3 begitupun seterusnya

Untuk g o f = {(0,3), (1,3), (2,6)}

➢ (g o f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 6

Contoh 3

Diketahui fungsi f : R R dengan f(x) = 4x – 1 dan fungsi g : R R dengan g(x) = x2 + 2

Tentukan

a. (g o f)(x)
b. (f o g)(x)
c. (f o g)(2)
d. (g o f)(-1)
e. (g o f)(½)

Jawab

a. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(4x - 1)$
$= (4x - 1)^2 + 2$
$= 16x^2 - 8x + 1 + 2$
$= 16x^2 - 8x + 3$

b. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x^2 + 2)$
$= 4(x^2 + 2) - 1$
$= 4x^2 + 8 - 1$
$= 4x^2 + 7$

c. $(f \circ g)(2) = 4.(2)^2 + 7 = 16 + 7 = 23$

d. $(g \circ f)(-1) = 16.(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

e. $(g \circ f)(½) = 16.(½)^2 - 8(½) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

KEGIATAN 1

1. Isilah titik-titik sesuai dengan pendapat Anda!
2. Kegiatan ini ditujukan untuk membuktikan dan menemukan sifat-sifat fungsi komposisi

Membuktikan Sifat Komutatif

a. Diketahui:

$f(x) = 3x + 2$

$g(x) = x - 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(\ldots\ldots)$

$= 3(\ldots\ldots) + 2$

$= \ldots\ldots - \ldots\ldots + 2$

$= \ldots\ldots$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots) - 2$

$= \ldots\ldots + \ldots\ldots - 2$

$= \ldots\ldots$

Diperoleh $f \circ g \neq g \circ f$

Membuktikan Sifat Assosiatif

b. Diketahui :

$f(x) = x - 3$

$g(x) = 2x + 2$

h(x) = 5 – x

(f o g)(x) = f(g(x))

= f(…….)

= (…….) – 3

= …… + ……. – 3

= ……..

((f o g) o h)(x) = (f o g)(h(x))

= (f o g)(……)

= 2(…….. .) – 1

= … - …. – 1

= ……..

(g o f)(x) = g(h(x))

= g(…….)

= 2(……..) + 2

= ….. - ….. + 2

= ……

(f o (g o h))(x) = f((g o h)(x))

= f(…….)

= (…….) – 3

= ….. - …… - 3

= ……

Diperoleh (f o g) o h = f o (g o h)

KEGIATAN 2

Penugasan

- Lihatlah langkah-langkah penyelesaian sesuai modul diatas.
- Selesaikan permasalahan dibawah dengan langkah-langkah penyelesaian

1. Jika $f(x) = 3x - 5$ dan $g(x) = -x$. Tentukan nilai dari $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$!
2. Jika $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$. Tentukan nilai dari $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$!
3. Jika diketahui fungsi-fungsi f dan g dinyatakan dalam bentuk pasangan berurutan sebagai berikut.

   $f = \{(-3,1), (-2,4), (-1,5), (0,3)\}$

   $g = \{(4,-3), (1,-2), (3,-1), (5,0)\}$

   a. Tentukan nilai dari $(f \circ g)$ dan $(g \circ f)$ dalam bentuk pasangan berurutan.
   b. Hitunglah nilai dari:
      i. $(f \circ g)(1)$
      ii. $(f \circ g)(5)$
      iii. $(f \circ g)(4)$
      iv. $(g \circ f)(1)$
      v. $(g \circ f)(-3)$
      vi. $(g \circ f)(0)$
4. Jika $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ dan $g(x) = \frac{4 - 2x}{x + 2}$. Tentukan nilai dari $(f \circ g)(x)$ dan $(f \circ g)(1)$!
5. Jika diketahui fungsi $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 6x$ dan $h(x) = 7 - 3x$
   a. $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
   b. $(f \circ h)(x)$ dan $(h \circ g)(x)$

Dalam banyak hal, sebuah fungsi dapat didekomposisi atau diuraikan dalam beberapa cara. Misalkan, $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, dapat merupakan komposisi dari

$p(x) = f(g(x))$ di mana $g(x) = \sqrt{x}$ dan $f(x) = x^2 + 4$, atau sebagai

$g(x) = \sqrt{x + 4}$ dan $f(x) = x^2$

Bagaimana mencari salah satu pembentuk atau komponen dari fungsi komposisi? Misalnya, diketahui fungsi f(x) dan $(f \circ g)(x)$ untuk mencari fungsi g(x) dan sebagainya. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 4

Diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 3x - 2$ dan fungsi $f(x) = 2x + 1$. Tentukan nilai dari g(x)!

Jawab

$(f \circ g)(x) = 3x - 2$ $\qquad$ $f(x) = 2x + 1$

$f(g(x)) = 3x - 2$ $\qquad$ $f(g(x)) = 2.g(x) + 1$

$$f(g(x)) = f(g(x))$$

$$2.g(x) + 1 = 3x - 2$$

$$2.g(x) = 3x - 3$$

$$g(x) = \frac{3x-3}{2}$$

Contoh 5

Diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 6x + 3$ dan fungsi $g(x) = 2x - 3$. Tentukan nilai dari $f(x)$!

Jawab

$(f \circ g)(x) = 6x + 3$ $\qquad$ misalkan, $p = 2x - 3$

$f(g(x)) = 6x + 3$ $\qquad$ $p + 3 = 2x$

$f(2x - 3) = 6x + 3$ $\qquad$ $\frac{p + 3}{2} = x$

$f(p) = 6.(\frac{p + 3}{2}) + 3$

$f(p) = 3(p + 3) + 3$

$f(p) = 3p + 9$

Jadi, $f(x) = 3x + 9$

KEGIATAN 3

Kegiatan ini ditujukan untuk memahami penyelesaian dan menentukan fungsi, jika diketahui fungsi komposisi dan fungsi lainnya.

1. Tentukan rumus untuk fungsi g(x), jika diketahui
   a. $f(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 12x - 2$
   b. $f(x) = 4x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 2x2 - x + 3$

2. Tentukan rumus untuk fungsi f(x), apabila diketahui
   a. g(x) = x + 1 dan (f o g)(x) = 2x – 4
   b. g(x) = 2x + 1 dan (f o g)(x) = 12x2 + 14x – 3

KEGIATAN 4

1. Pahami dari masalah kontekstual dibawah ini!
2. Selesaikan masalah kontekstual tersebut dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian!
   a. Sebuah perusahaan menggunakan dua buah mesin untuk mengubah bahan mentah menjadi bahan jadi. Mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah dai bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Mesin I dianalogikan dengan fungsi f(x) = 2x – 3 dan mesin II dianalogikan dengan fungsi x^2.

      a) Apalagi bahan mentah yang digunakan sebanyak x, tentukan persamaan hasil bahan jadi.
      b) Apabila bahan mentah yang digunakan sebanyak 100 kg, berapa banyak hasil produksi?

   b. Misalkan jumlah pengeluaran pemerintah dapat diwakilkan oleh fungsi sebagai berikut ini.

      Y = C + I

      Fungsi diatas menyatakan bahwa pendapatan nasional (Y) merupakan fungsi dari konsumsi oleh rumah tangga (C) dan investasi oleh swasta (I). Meskipun demikian, invenstasi juga ditentukan oleh tingkat suku bunga (r) sesuai dengan persaman berikut ini.

$$I(r) = 250 - 500r$$

Sementara konsumsi masyarakat juga ditentukan oleh pendapatan nasional (Y) seperti pada pada persamaan berikut ini.

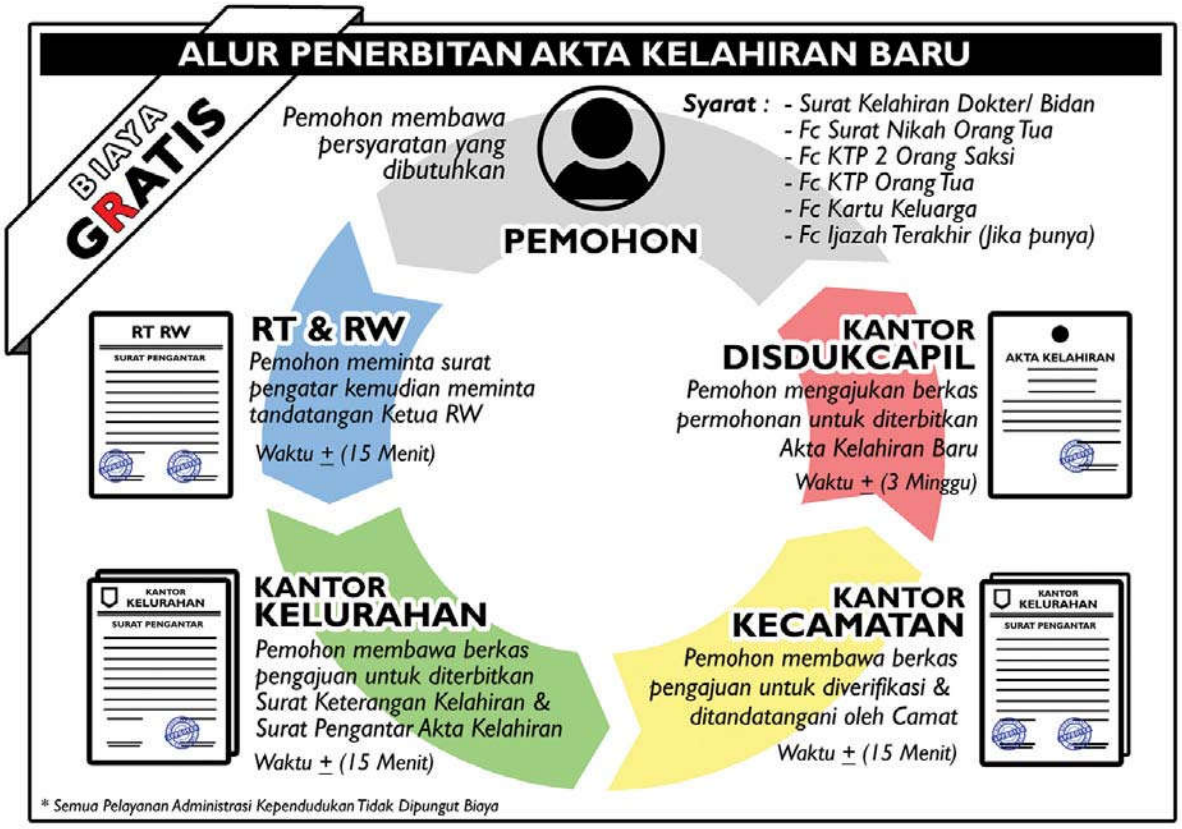
$$C(Y) = 500 + 0{,}8Y$$

Tentukan :

a. Fungsi komposisi (Y o I)(r)
b. Pendapatan nasional jika suku bunga adalah 12%

Invers Fungsi

Perhatikan alur penerbitan akta kelahiran berikut. Prosedur atau operasinya adalah dimulai dari penyiapan kelengkapan berkas dan pembuatan surat pengantar RT-RW, kantor kelurahan, kantor kecamatan dan terakhir di kantor dinas kependudukan. Prosedur sebaliknya, bagaimana bisa mendapatkan akta kelahiran yang baru? Prosedur atau operasinya adalah akta kelahiran diperoleh dari kantor dinas kependudukan, namun harus pengantar dari kecamatan, kelurahan/ desa, dan RT-RW. Alur dan prosedur iini merupakan prosedur balikan/invers.



Jadi, invers atau kebalikan dari fungsi, tidak selalu menghasilkan fungsi. Jika invers dari suatu fungsi merupakan fungsi juga, maka invers tersebut dinamakan fungsi invers. Syarat agar invers suatu fungsi merupakan fungsi invers jika dan hanya jika f suatu fungsi bijektif (korespondensi satu-satu). Perhatikan fungsi berikut.

$$f : Df \rightarrow Rf$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Apabila fungsi f tersebut dibalik, yaitu memadankan nilai y ke x, maka fungsi ini disebut balikan f atau invers f, ditulis f^{-1}. Di sini lambang f^{-1} tidak berarti 1/f. Fungsi invers tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$f^{-1} : D_{f-1} \rightarrow R_{f-1}$$

$$y \rightarrow x = f^{-1}(x)$$

Langkah-langkah untuk menentukan invers suatu fungsi f(x) sebagai berikut.

1. Misalkan f(x) sebagai variabel y;
2. Selesaikan persamaan y = f(x) sehingga diperoleh x sebagai fungsi dari y atau $x = f^{-1}(y)$
3. Ganti variabel y pada $f^{-1}(y)$ dengan x sehingga diperoleh $f^{-1}(x)$ yang merupakan invers dari f(x).

Contoh 1

Diketahui fungsi f(x) = x + 5, tentukan rumus fungsi f-1(x), f-1(2) dan f-1(-4)

Jawab

f(x) = 2x – 3 dengan y = f(x)

maka, y = x + 5

y - 5 = x

Mengganti variabel y dengan x, dan

Sehingga, $f^{-1}(x) = x-5$

$f^{-1}(2) = 2 – 5 = -3$

$f^{-1}(-4) = - 4 – 5 = - 9$

Contoh 2

Diketahui fungsi f(x) = 2x – 3, tentukan :

a. Rumus fungsi $f^{-1}(x)$
b. Hitunglah nilai dari $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ dan $f^{-1}(2)$

Jawab

a. $f(x) = 2x - 3$ dengan $y = f(x)$
maka, $y = 2x - 3$

$$y + 3 = 2x$$
$$\frac{y + 3}{2} = x$$

Sehingga, $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$

b. $f^{-1}(0) = \frac{x + 3}{2} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$

$f^{-1}(1) = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$f^{-1}(2) = \frac{1 + 3}{2} = \frac{5}{2}$

Contoh 3

Tentukan fungsi invers dari: (a) $y = f(x) = 2x$, (b) $y = f(x) = x^3 - 1$. Gambarkan grafiknya dalam bidang koordinat.

Penyelesaian

(a) Kita nyatakan x dalam y sebagai berikut.

$y = 2x$

$x = ½ y$

Jadi, $f^{-1}(y) = ½ y$. Ganti y dengan x, diperoleh invers fungsi x

$f^{-1}(x) = ½ x$

(b) Kita nyatakan x dalam y sebagai berikut.

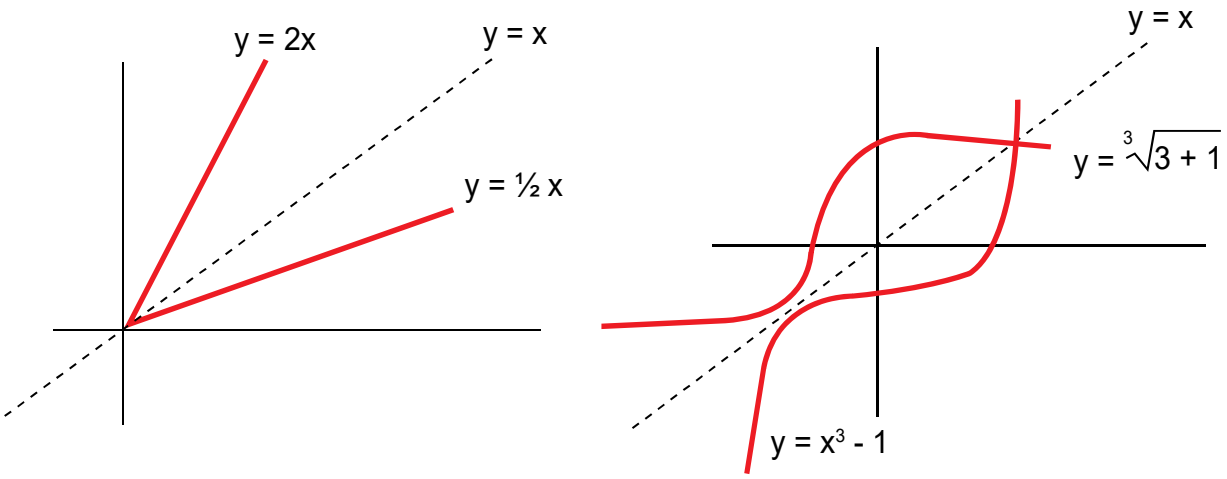
$y = x^3 - 1$

$x = \sqrt[3]{3 + 1}$

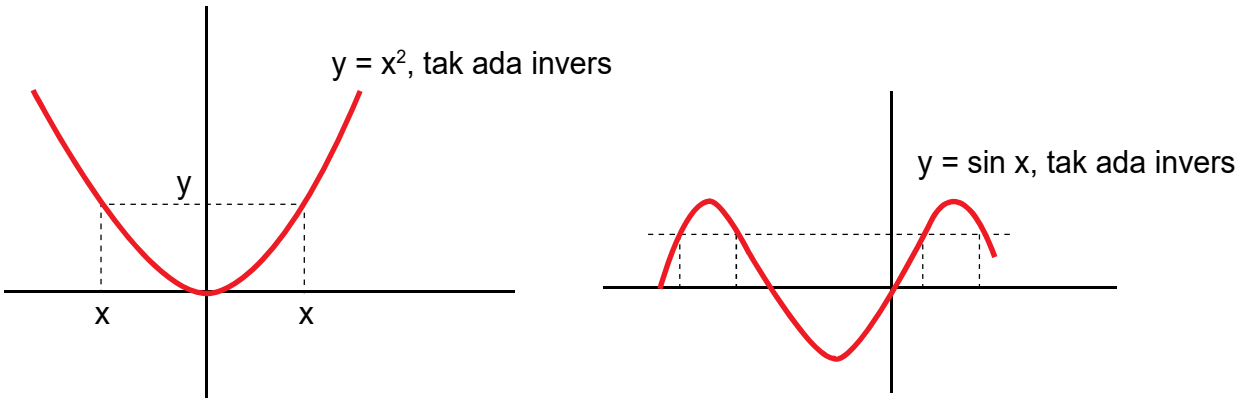
Jadi, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{3 + 1}$. Ganti y dengan x, diperoleh invers fungsi x

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3 + 1}$

Grafik dari fungsi dan inversnya tampak pada gambar berikut. Perhatikan bahwa grafik dari fungsi invers merupakan pencerminan grafik fungsinya terhadap sumbu y = x.



Apakah setiap fungsi memiliki invers? Ternyata tidak. Contoh yang diberikan di atas merupakan contoh fungsi yang memiliki invers. Tetapi, fungsi y = x2 tidak memiliki invers. Untuk suatu nilai y terdapat dua nilai x. Demikian juga, dengan fungsi y = sin x, untuk suatu nilai terdapat banyak nilai x yang berpadanan. Perhatikan gambar berikut.



Dari grafik tersebut tampak bahwa fungsi yang tidak memiliki invers apabila dibuat garis mendatar, maka garis tersebut akan memotong kurva lebih dari satu titik potong. Jika sebuah fungsi memiliki invers, maka garis mendatar yang dibuat hanya memiliki satu titik potong dengan kurva tersebut. Cara lain untuk memeriksa eksistensi atau ada tidaknya invers fungsi adalah dengan teorema berikut.

Apabila f monoton murni pada daerah asalnya, maka f memiliki invers (A)

Contoh:

Buktikan $f(x) = x^5 + 2x + 1$ memiliki invers.

Bukti:

Turunan f : $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, untuk semua x. Berarti f memiliki invers.

Bagaimana mendefinisikan daerah asal agar sebuah fungsi memiliki invers? Dari gambar di atas tampak apabila daerah definisi dipersempit, maka f memungkinkan memiliki invers. Misalnya, $f(x) = x^2$ memiliki invers apabila $D_f = [0, \infty)$ atau Df = $(-\infty, 0)$ saja.

Contoh:

Definisikan daerah asal f(x) = sin x agar memiliki invers.

Penyelesaian:

Kita batasi daerah definisinya $D_f = (-\pi/2, \pi/2)$ maka fungsi f(x) = sin x memiliki invers.

KEGIATAN 5

- Kegiatan ini untuk melatih kemampuan dalam mengidentifikasi masalah dan menyelesaikannya!
- Berikut beberapa contoh untuk mengasah kemampuan saudara dalam memahami konsep dari fungsi invers dari beberapa fungsi khusus.

1. Dimisalkan, fungsi linear f(x) = ax + b. Untuk mencari fungsi inversnya ditentukan dengan cara berikut:
   a. ubah f(x) menjadi y, sehingga
      y = ax + b
   b. Persamaan tersebut diubah menjadi persamaan dalam bentuk variabel y
      ax + b = y
      ax = y - …….
      x = $\frac{\qquad}{\square}$

c. Ganti variabel x dengan f-1 (x) dan variabel y dengan x

Jadi, $f^{-1}(x)$ = ……

2. Dimisalkan, fungsi linear $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, x \neq -\frac{d}{c}$. Untuk mencari fungsi inversnya ditentukan dengan cara berikut:

a. ubah f(x) menjadi y, sehingga

$y = \frac{ax + b}{cx + d}$

b. Persamaan tersebut diubah menjadi persamaan dalam bentuk variabel y

$y(cx + d) = (ax + b)$

……+ …. = … + ……

Jadikan satu, yang memiliki variabel yang sama

(….. + …..) x = …….

$x = \frac{\quad}{\square}$

c. Ganti variabel x dengan $f^{-1}(x)$ dan variabel y dengan x

Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{\quad}{\square}$

KEGIATAN 6

- Pahami dari masalah kontekstual dibawah ini!
- Selesaikan masalah kontekstual tersebut dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian!

a. Jumlah produksi makanan ringan dari suatu pabrik per hari mengikuti fungsi

$$f(x) = 2x^2 + 300$$

dengan x adalah banyaknya bahan baku yang diperlukan (dalam kg)

a) Tentukan banyaknya makanan ringan yang dapat dihasilkan dari bahan baku sebanyak 100kg.

b) Tentukan banyaknya bahan baku yang dibutuhkan untuk menghasilkan makanan ringan sebanyak 10.300 buah

b. Mesin cetak membutuhkan x rim kertas untuk menghasilkan majalah sebanyak f(x) eksemplar.

Apabila $f(x) = \frac{x^2 + 10.000}{5}$, maka

c) Tentukan berapa eksemplar majalah yang dihasilkan jika memakai 100 rim kertas,

d) Berapa rim kertas yang dibutuhkan untuk memperoleh majalah sebanyak 50.000 eksemplar?

Pengayaan: Invers Fungsi Trigonometri

Telah diketahui bahwa invers fungsi dapat dirumuskan dengan membatasi daerah definisinya. Begitu banyaknya penggunaan fungsi trigonometri, maka kita akan mendefinisikan invers fungsi trigonometri sebagai berikut.

$x = \text{arc sin } y = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$x = \text{arc cos } y = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

$x = \text{arc tan } y = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2$

Contoh

$\sin^{-1}(-0.5) = -\pi/6$

$\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$

$\tan^{-1}(1) = \pi/4$

Rangkuman

1. Apabila A dan B himpunan, maka hubungan atau pemasangan anggota A dengan anggota B disebut relasi. Apabila antara anggota A dan anggota B tidak ada hubungan, maka himpunan A dan B tidak berelasi.
2. Fungsi adalah relasi yang memetakan, memasangkan atau mengawankan setiap anggota di himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B.
3. Sebuah fungsi f dari himpunan A ke B, dapat dinyatakan dalam bentuk diagram, pasangan terurut atau dengan notasi fungsi $f : A \rightarrow B$ atau dengan rumus $y = f(x)$, dimana $x \in A$ dan $y \in B$. Himpunan A disebut pula dengan daerah asal (domain) dan B disebut daerah kawan (kodomain). Sedangkan daerah hasil fungsi (range) merupakan himpunan bagian dari B
4. Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B dengan darah hasil R. Fungsi disebut fungsi surjektif (onto) apabila daerah hasil sama dengan daerah kawan (R = B), disebut fungsi injektif (into) apabila untuk setiap $a \neq b$, maka $f(a) \neq f(b)$ dan disebut fungsi bijektif (satu ke satu) apabila fungsi tersebut injektif dan sekaligus surjektif
5. Berdasarkan karakteristik nilai fungsi, dikenal fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi tangga atau fungsi bilangan bulat terbesar, fungsi modulus atau fungsi nilai mutlak, fungsi linear, fungsi kuadrat, serta berbagai jenis fungsi lainnya.
6. Apabila f dan g sebuah fungsi, maka operasi dan komposisi fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.
   a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   b. $(f – g)(x) = f(x) – g(x)$
   c. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
   d. $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$
7. Sebuah f memiliki invers atau balikan berupa fungsi invers f^{-1} jika dan hanya jika f suatu fungsi bijektif (korespondensi satu-satu). Apabila f dinyatakan dengan $y = f(x)$, maka balikan f atau invers f, ditulis f^{-1} dapat dinyatakan sebagai $x = f^{-1}(y)$. Sifat-sifat fungsi $y = f(x)$ memiliki invers:
   a. Grafik fungsi invers f^{-1} merupakan pencerminan dari f terhadap garis $y = x$
   b. Setiap garis mendatar hanya memotong grafik f di satu titik
   c. Fungsi f monoton murni di daerah asalnya
   d. $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$
8. Sebuah f yang tidak memiliki invers dapat dijadikan memiliki invers dengan cara membatasi atau mempersempit daerah asalnya
9. Invers fungsi trigonometri didefinisikan sebagai berikut.

   $x = \text{arc sin } y = \sin^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

   $x = \text{arc cos } y = \text{cos-1 } y \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

   $x = \text{arc tan } y = \text{tan-1 } y \quad \Leftrightarrow \quad y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2$

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas X SMA/SMK, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Wirodrikomo, Sartono. Matematika untuk SMA Kelas XI Semester 2. Jakarta : Erlangga

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

BK. Noormandiri, Endar. 1995.Buku Pelajaran Matematika Untuk SMU Kelas 2. Jakarta: Erlangga

http://satulayanan.id/layanan/index/17/e-ktp/kemendagri yang diakses tanggal pukul 11.13 WIB

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 4

Bertani

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Matematika Paket C Tingkatan V Modul Tema 4
Modul Tema 4 : Bertani

- Penulis: Rain Adhistya

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
  Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
  Kebudayaan, 2018

iv+ 32 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar ii
Daftar Isi iii
Petunjuk Penggunaan Modul 1
Tujuan Pembelajaran Modul 3
Pengantar Modul 3
UNIT 1 KONSEP DAN PERBANDINGAN/RASIO TRIGONOMETRI DASAR SERTA PENERAPANNYA PADA AKTIFITAS BERCOCOK TANAM 5
Kegiatan 1 8
A. Sudut 0^O dan 180^O 9
B. Sudut 30^O dan 60^O 10
C. Sudut 45^O 10
Kegiatan 2 13
Kegiatan 3 14
UNIT 2 PENERAPAN RASIO TRIGONOMETRI SUDUT-SUDUT BERELASI PADA BIDANG KONSTRUKSI 17
A. Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut disemua Kuadran 18
Kegiatan 1 23
Kegiatan 2 26
Rangkuman 28
Kriteria Pindah Modul 30
Saran Referensi 31
Daftar Pustaka 31

BERTANI

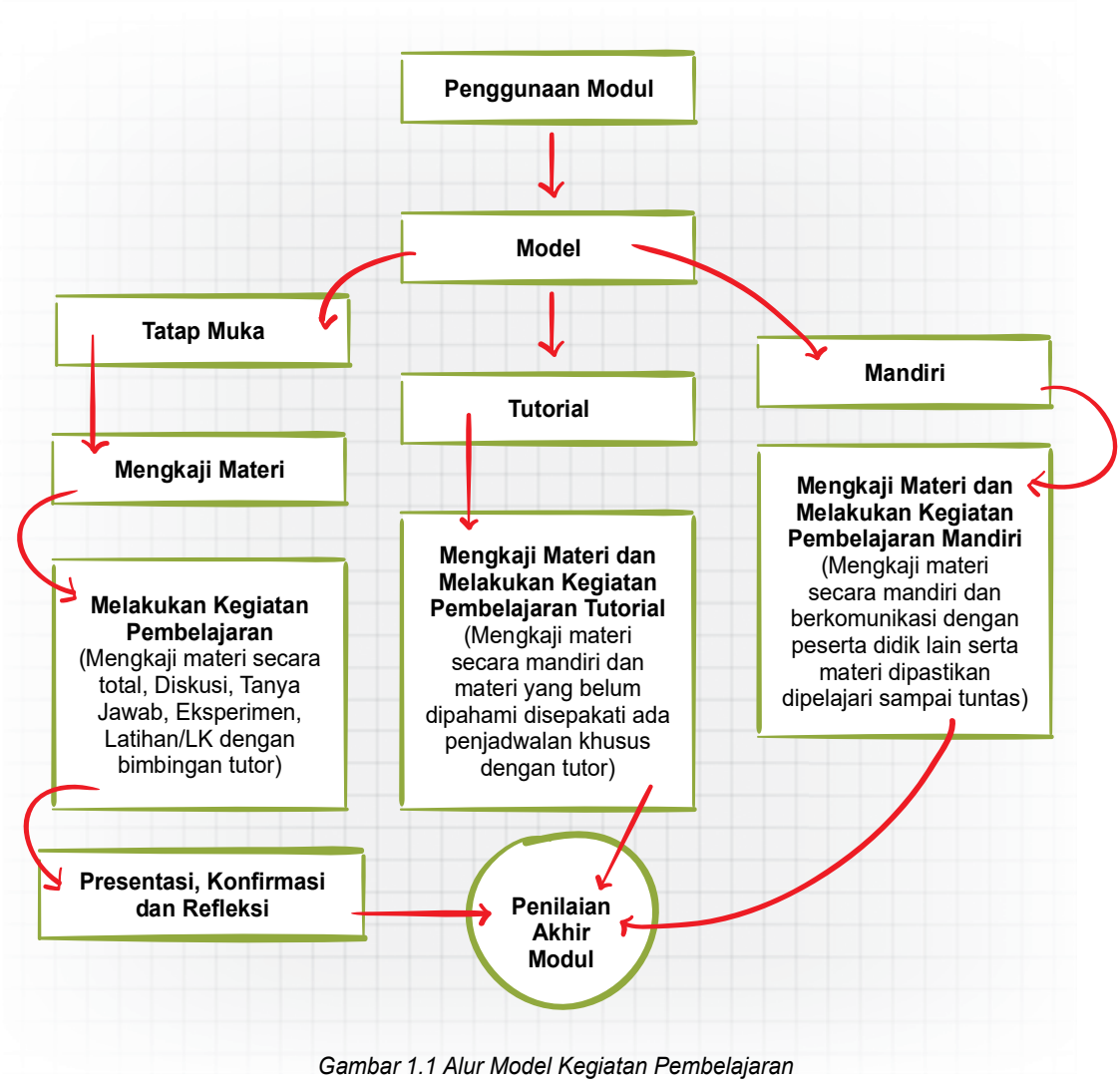
Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang perbandingan atau rasio trigonometri dasar sinus dan cosinus serta rasio turunannya seperti tangen, secan, cosecant, dan cotangent melalui tema pertanian maupun penerapan lainnya dalam kehidupan kita sehari-hari. Subtema cara bercocok tanam dan jembatan ditekankan pada penggunaan jalan dan lahan serta masalah sehari-hari lainnya . Contoh-contoh dalam bentuk masalah kontekstual, disajikan dengan kata-kata yang sederhana, ringan dan mengalir sehingga mudah untuk dipahami.

Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai, yaitu:

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.

Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut alur petunjuk penggunaan modul. Secara umum dapat dilihat pada bagan berikut ini.



Gambar 1.1 Alur Model Kegiatan Pembelajaran

Pembelajaran tatap muka menekankan pada pembelajaran aktif melalui metode diskusi, tanya jawab, demonstrasi, eksperimen, dan lainnya; pembelajaran kooperatif melalui kerjasama di antara peserta didik dalam bentuk bekerja kelompok, mengembangkan keterampilan social; pembelajaran berbasis masalah melalui pendekatan masalah otentik atau masalah dalam kehidupan nyata sebagai langkah awal untuk menguasai atau mempelajari suatu tema dan bahan kajian; pembelajaran penemuan (*discovery learning*) melalui belajar aktif melakukan percobaan, mendiskusikan, mempraktekkkan untuk menemukan secara terbimbing dan bertahap dari konsep atau prinsip yang dipelajari; pembelajaran kontekstual yang mengaitkan materi yang dipelajari dengan situasi dunia nyata.

Pembelajaran tutorial dilaksanakan melalui belajar mandiri yang dipantau dan dievaluasi oleh tutor secara berkala. Sedangkan, pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik untuk menguasai suatu kompetensi menggunakan berbagai sumber belajar secara mandiri.

Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

1. Memahami konsep dan operasi matematika pada rasio/perbandingan trigonometri dan penerapannya dalam bidang pertanian dan masalah sehari-hari lainnya
2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan rasio/perbandingan trigonometri dan penerapannya dalam bidang pertanian dan masalah sehari-hari lainnya
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan ekonomi dan masalah lainnya sehari-hari

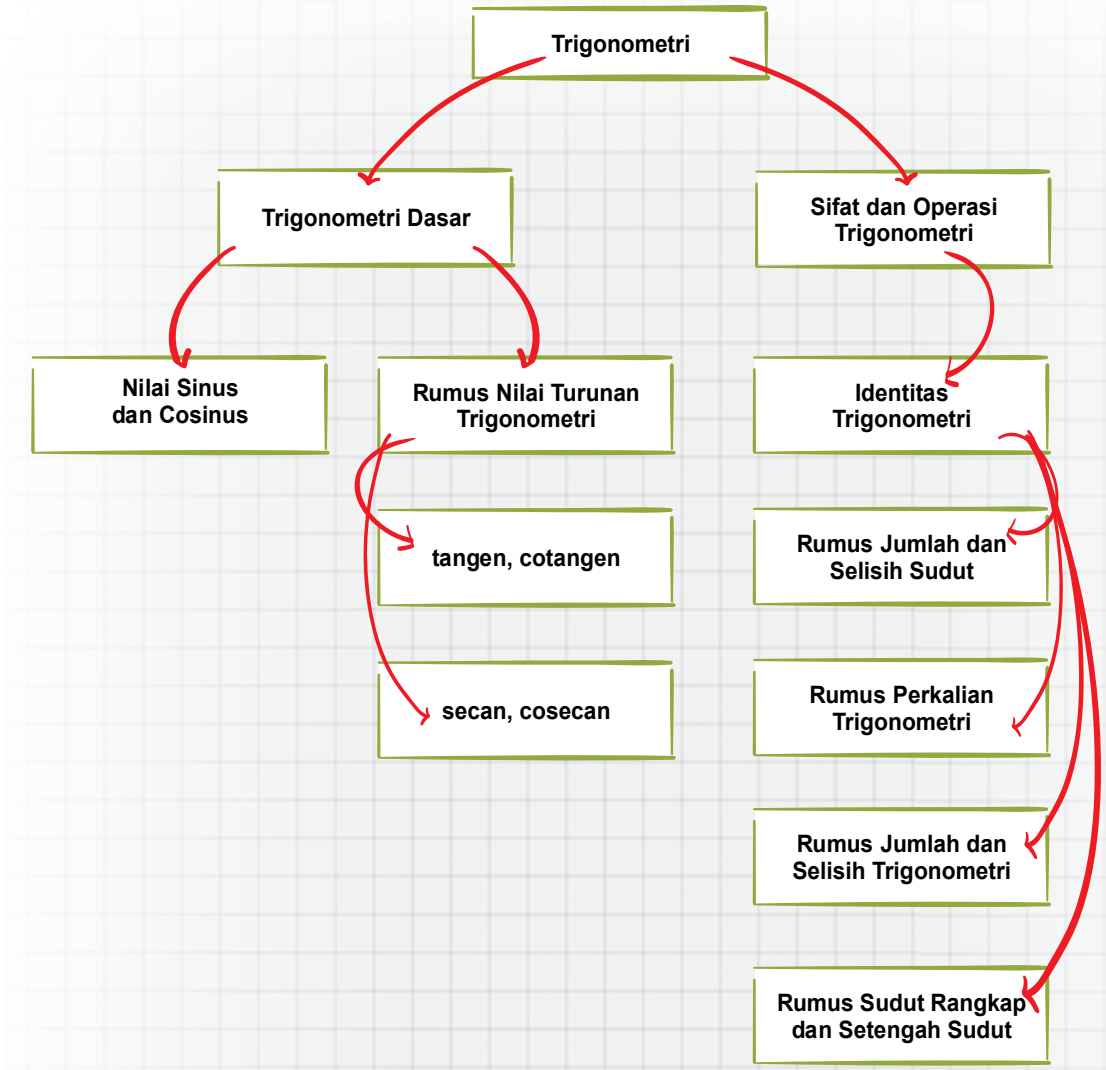
Secara khusus, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan pengetahuan dan keterampilan dalam menemukan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku dari masalah kontekstual; menentukan, menggunakan, dan menyelesaikan masalah rasio trigonometri dalam menyelesaikan soal, sudut-sudut berelasi dan berbagai kuadran.

Pengantar Modul

Banyak kalimat, pernyataan, peristiwa atau situasi sehari-hari yang menerapkan konsep perbandingan atau rasio trigonometri dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang keilmuan lainnya seperti pengukuran tinggi pohon, gedung, lebar sungai, jarak antar pantai, perhitungan di bidang astronomi melalui teknik triangulasi, sistem navigasi satelit, musik, akustik, optik, analisis pasar finansial, elektronik, teori peluang, statistika, biologi, pencitraan medis, dan sebagainya. Pada modul ini akan dibahas perbandingan trigonometri terutama yang terkait dengan konsep dan penggunaan dari trigonometri dasar (sinus dan cosinus) dan turunannya (tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku, penentuan nilai trigonometri pada berbagai kuadran dan pada sudut-sudut berelasi, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

Materi pada modul ini bertema "**Bertani**" dengan uraian materi dan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat kontekstual, yang terbagi dalam 2 subtema yang terintegrasi kedalam kegiatan pembelajaran, yaitu subtema "**Bercocok Tanam**", dan subtema "**Jembatan Sebagai Sarana**".

Dengan mempelajari modul ini dimana materi dikaitkan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik dengan mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Peta konsep dari materi pelajaran tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.


Trigonometri
Trigonometri Dasar
Sifat dan Operasi Trigonometri
Nilai Sinus dan Cosinus
Rumus Nilai Turunan Trigonometri
Identitas Trigonometri
tangen, cotangen
Rumus Jumlah dan Selisih Sudut
secan, cosecan
Rumus Perkalian Trigonometri
Rumus Jumlah dan Selisih Trigonometri
Rumus Sudut Rangkap dan Setengah Sudut

UNIT 1

KONSEP DAN PERBANDINGAN/ RASIO TRIGONOMETRI DASAR SERTA PENERAPANNYA PADA AKTIFITAS BERCOCOK TANAM

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran dari unit ini adalah untuk menggali dan menemukan konsep tentang rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku kemudian menggunakan konsep tersebut untuk menyelesaikan masalah kontekstual dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya.

Perhatikan gambar tersebut, ketinggian pohon kelapa tersebut dapat ditaksir dan diukur secara tidak langsung tanpa harus mengukur dengan cara menaikinya. Bagaimana caranya?, yaitu menggunakan konsep trigonometri. Trigonometri sendiri (dari bahasa Yunani terdiri atas dua kata yaitu trigonon = tiga sudut & metro = mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang

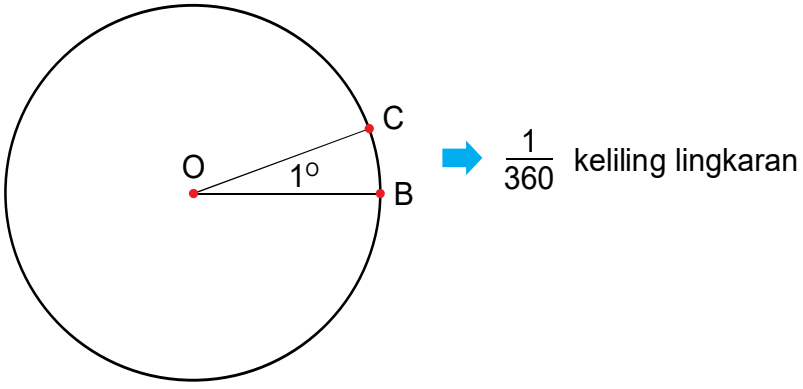
berkaitan dengan ilmu ukur sudut-sudut pada segitiga seperti sinus, cosinus dan tangen.

Al-Battani atau Muhammad Ibn Jabir Ibn Sinan Abu Abdullah dikenal sebagai bapak trigonometri. Ia adalah tokoh bangsa Arab, gubernur Syria dan juga astronom dan ahli matematika Muslim terbesar. Al-Battani melahirkan trigonometri untuk level lebih tinggi dan orang pertama yang menyusun tabel co-tangent serta yang merumuskan tahun matahari sebagai 365 hari, 5 jam, 46 menit dan 24 detik.

Al-Battani lahir sekitar 858 di Harran, Urfa, di Upper Mesopotamia, yang sekarang di Turki. Ayahnya adalah seorang pembuat instrumen ilmiah terkenal. Beberapa sejarawan Barat menyatakan dia berasal dari kalangan miskin atau budak Arab, namun penulis biografi tradisional Arab tidak menyebutkan ini.

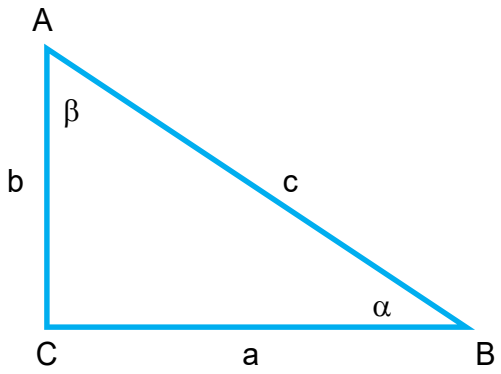
Dia tinggal dan bekerja di Ar-Raqqah, sebuah kota di utara pusat Suriah dan di Damaskus, yang juga merupakan tempat wafatnya. Al-Battani meninggal pada tahun 929 di Qasr al-JISS (dekat Samarra), Damaskus.

Dalam trigonometri, pengukuran sudut dinyatakan dalam satuan derajat atau menggunakan satuan radian. Satuan derajat diperoleh dengan membagi lingkaran menjadi 360 bagian yang sama melalui pusatnya. Besar sudut satu putaran adalah 360^{O} (dibaca 360 derajat). Besar sudut dalam radian diperoleh dari rasio atau perbandingan panjang busur yang dihadapi sudut dengan jari-jarinya. Pada lingkaran berjari-jari 1 satuan, maka besar sudut satu putaran adalah panjang busur (keliling)/jari-jari = 2π (dalam radian). Jadi, $360^{O} = 2\pi$ atau $1^{O} = \pi/180$ (dalam radian). Satuan radian merupakan satuan tanpa dimensi karena merupakan hasilbagi panjang busur dengan jari-jarinya.



Untuk memudahkan dalam memahami tentang konsep trigonometri, dapat diilustrasikan dengan segitiga siku-siku ABC dengan titik sudut siku-siku terletak di C.

Panjang sisi dihadapan sudut A adalah a, panjang sisi dihadapan sudut B adalah b dan panjang sisi dihadapan sudut C adalah c. sisi a dan sisi b dinamakan sisi siku-siku sedangkan sisi c dinamakan hipotenusa atau sisi miring.



Nilai perbandingan atau rasio sisi yang dihadapi sudut α dengan sisi miring disebut sinus, dan ditulis:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi di hadapan sudut } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Sedangkan nilai perbandingan atau rasio dari sisi yang dekat sudut α dengan sisi miring disebut cosinus, dan ditulis:

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi di dekat sudut } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Nilai trigonometri lainnya dapat diturunkan dari sinus dan cosinus, yaitu:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{a}$$

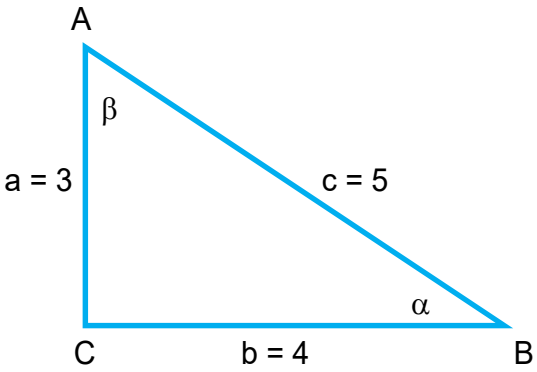
$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotan } \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$$

Contoh 1:

Segitiga siku-siku ABC mempunyai panjang sisi-sisinya a = 3, b = 4 dan c = 5. Carilah nilai dari keenam perbandingan trigonometri untuk sudut α!



Jawab:

Dengan menggunakan konsep yang diatas, diperoleh nilai

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi di hadapan sudut}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

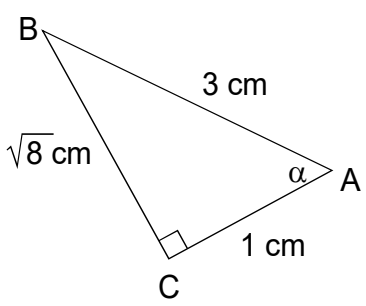
$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi di dekat sudut}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$$

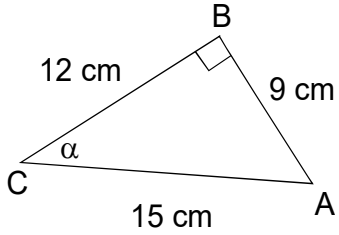
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \qquad \text{cotan } \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

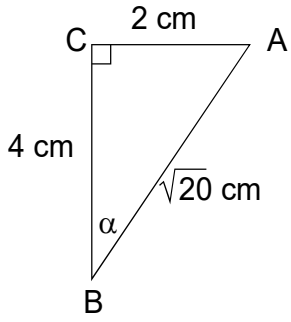
KEGIATAN 1

Pahami beberapa masalah dibawah ini, kemudian selesaikan menurut pemahaman Anda!

1. Tentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk sudut α pada segitiga-segitiga berikut.





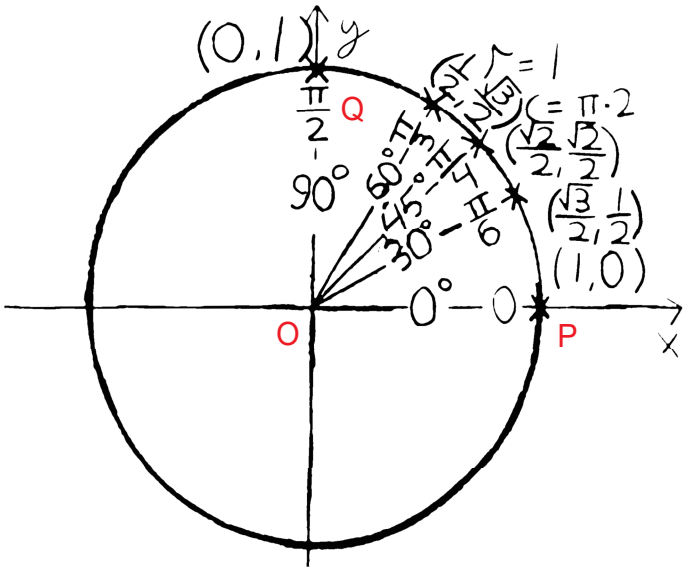


2. Diketahui segitiga ABC siku-siku di titik C dengan panjang AC = 6 cm, BC = 8 cm, dan besar sudut BAC = α. Tentukan nilai dari sin α, cos α, tan α, cotan α, sec α dan cosecan α

3. Carilah nilai perbandingan trigonometri sudut α yang lain (α merupakan sudut lancip), jika diketahui nilai:
   a. sin $\alpha = \frac{3}{4}$
   b. cos $\alpha = \frac{1}{2}$
   c. tan $\alpha = \frac{5}{12}$
   d. sin $\alpha = \frac{9}{15}$

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa atau sudut khusus di mana perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara eksak dan langsung menggunakan bantuan lingkaran satuan tanpa menggunanakan tabel trigonometri atau kalkulator. Sudut khusus yang dimaksud yaitu 0^o, 30^o, 45^o, 60^o dan 90^o.

Sudut 0^o dan 180^o



Perhatikan lingkaran berjari-jari 1 satuan dan berpusat di O(0, 0). Jika sudut $\alpha = 0^o$, maka OP akan berimpit dengan sb.x positif dan diperoleh koordinat titik P (1,0), sehingga

sin 0^o = 0/1 = 0

cos 0^o = 1/1 = 1

tan 0^o = sin 0^o/cos 0^o = 0/1 = 0

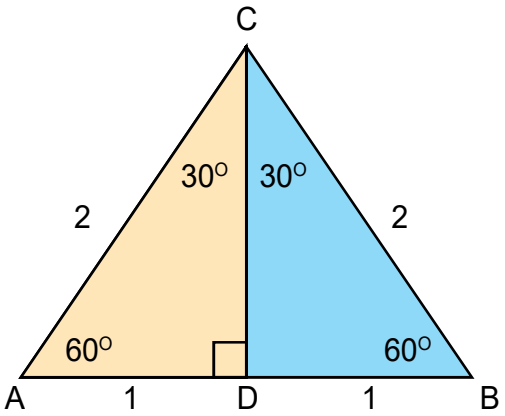
Jika sudut $\alpha = 90^o$, maka OQ akan berimpit dengan sb.y positif dan diperoleh koordinat titik Q (0,1), sehinggga

sin 90^o = 1/1 = 1

cos 90^o= 0/1 = 0

tan 90^o = 1/0 (tidak terdefinisi)

Sudut 30° dan 60°



Δ ABC adalah segitiga sama sisi dengan sisi dua satuan dan besar sudut 60°. Jika dari titik C ditarik garis tinggi dan membagi sudut dan sisi yang dihadapannya sama besar diperoleh dua buah segitiga yang kongruen yaitu Δ ADC dan Δ BDC serta sudut BCD = sudut ACD = 180° – 90° - 60° = 30°.

Menurut teorema Pythagoras, CD = $\sqrt{(22 - 12)} = \sqrt{3}$

$$\text{Sin } 30^\circ = \frac{\text{sisi di hadapan sudut 30}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\text{sisi di dekat sudut 30}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

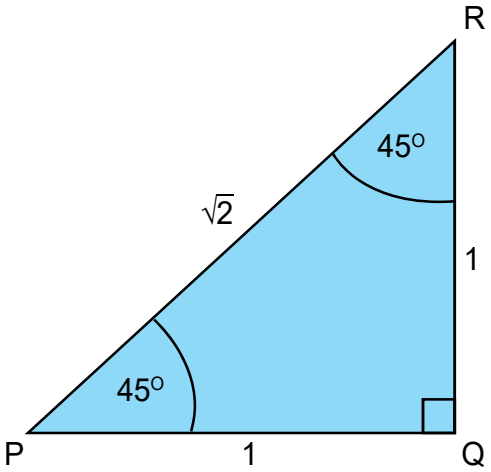
$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{Sin } 60^\circ = \frac{\text{sisi di hadapan sudut 60}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{\text{sisi di dekat sudut 30}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tan } 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Sudut 45°



Diketahui segitiga siku-siku sama kaki PQR dengan ∠P = ∠R = 45° dan sisi 1, 1 dan √2 satuan. Dengan menggunakan konsep diatas, diperoleh

$$\text{Sin } 45^\circ = \frac{\text{sisi di hadapan sudut 45}}{\text{hipotenusa}} = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

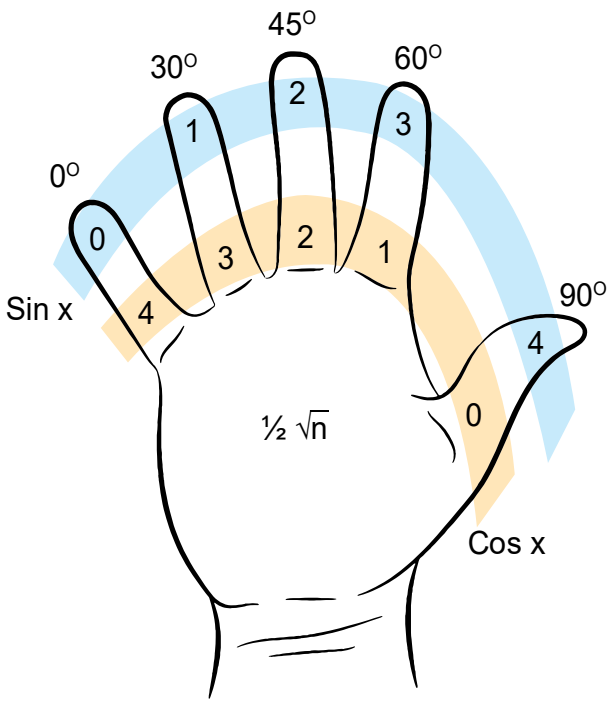
$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\text{sisi di dekat sudut 45}}{\text{hipotenusa}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

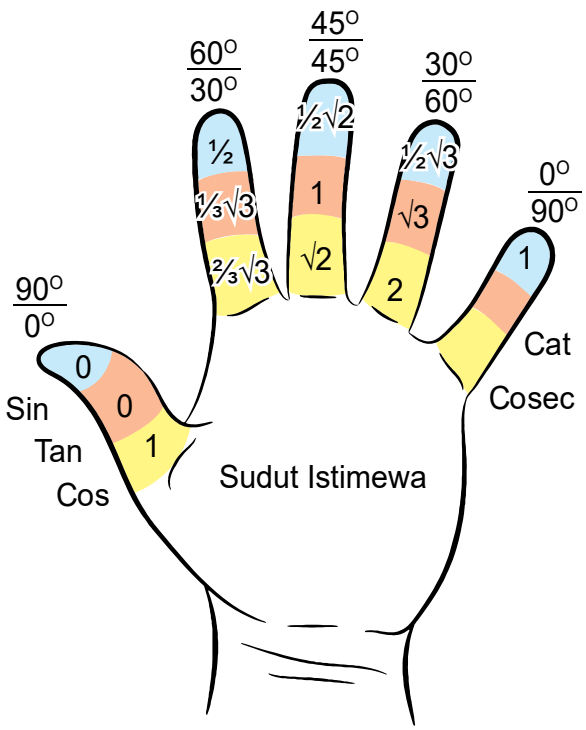
$$\text{Tan } 45^\circ = \frac{\text{sisi di hadapan sudut 45}}{\text{sisi di dekat sudut 45}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{1} = 1$$

Jika dikumpulkan menjadi sebuah tabel diperoleh nilai-nilai perbandingan Trigonometri untuk sudut-sudut khusus

	Besar Sudut α				
	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	½	½ √2	½ √3	1
Cos α	1	½ √3	½ √2	½	0
Tan α	0	⅓ √3	1	√3	-
Cotan α	-	√3	1	⅓ √3	0
Sec α	1	⅔ √3	√2	2	-
Cosec α	-	2	√2	⅔ √3	1

Untuk memudahkan dalam menghafalkan dan tidak cepat lupa dengan menggunakan jari tangan dalam menemukan fungsi trigonometri dengan menggunakan sudut istimewa.





Jari masing-masing tangan menunjukkan letak sudut istimewa, dan dari gambar terlihat bahwa nilai sin x untuk sudut 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o secara berturut-turut $\frac{1}{2}\sqrt{0}$, $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ begitupun sebaliknya untuk mencari nilai dari cos x.

Agar lebih memahami dan terampil dalam perhitungan teknis yang melibatkan nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut khusus, simaklah beberapa contoh berikut ini.

Contoh 2:

Hitunglah nilai dari:

a. $\sin 45^o + \cos 45^o$
b. $2.\cos 2\ 30^o$
c. $\frac{\sin 60^o}{\cos 60^o}$
d. $\tan 30^o - \cos 60^o + \sin 30^o$
e. $\sin 60^o.\ \cos 45^o + \cos 60^o.\ \text{Sin}\ 45^o$

Jawab:

a. $\sin 45^o + \cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$
b. $2.\cos 2\ 30^o = 2.(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 2.\frac{1}{4}.3 = \frac{3}{2}$
c. $\frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
d. $\tan 30^o - \cos 60^o + \sin 30^o = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
e. $\sin 60^o.\ \text{Cos}\ 45^o + \cos 60^o.\ \text{Sin}\ 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Contoh 3:

Tunjukkan bahwa:

a. $\sin 2\ 45^o + \cos 2\ 45^o = 1$
b. $1 + \tan 2\ 45^o = \sec 2\ 45^o$

Jawab:

a. $\sin 2\ 45^o + \cos 2\ 45^o = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (terbukti)
b. Ruas kiri

   $1 + \tan 2\ 45^o = 1 + (1)^2 = 2$

   Ruas kanan

   $\sec 2\ 45^o = (\sqrt{2})^2 = 2$

   Ruas kiri = Ruas kanan (terbukti)

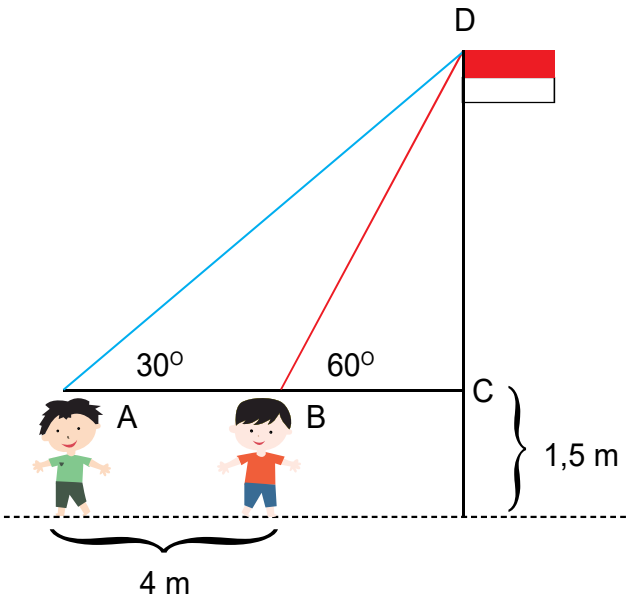
KEGIATAN 2

Pahami soal berikut dengan seksama, kemudian selesaikan!

1. Hitunglah, nilai dari fungsi trigonometri dibawah ini!
   a. $\sin 30^o + \tan 45^o$
   b. $\sin 60^o + \tan 30^o$
   c. $\tan 30^o + \tan 45^o$
   d. $\sin 60^o.\cos 60^o + \sin 30^o.\cos 30^o$
   e. $\sin 30^o.\cos 30^o.\tan 30^o$

2. Dengan menggunakan konsep dari trigonometri, tunjukkan bahwa
   a. $\sin 30^o.\ \cos 60^o + \cos 30^o.\ \text{Sin}\ 60^o = 1$
   b. $\sin 90^o.\cos 30^o - \cos 90^o.\sin 30^o = \sin 60^o$
   c. $2.\sin 30^o.\cos 30^o = \sin 60^o$
   d. $\sin 45^o.\ \cos 45^o = ½ \sin 90^o$
   e. $\dfrac{\sin 60^o}{1 + \cos 60^o} = \tan 30^o$

Dua orang anak ingin mengukur tinggi tiang bendera. Diperoleh dua sudut elevasi terhadap puncak tiang bendera. Jika orang pertama mendapatkan sudut elevasi 30^o dan orang kedua mendapatkan sudut elevasi 60^o. Jarak dari orang pertama ke orang kedua (AB) = 4 m dan jarak dari orang kedua ke tiang bendera (BC) = 2 m.



Tentukan:

a. Tinggi tiang bendera.
b. Jika ditarik tali dari puncak tiang bendera ke orang kedua (diwakili garis merah). Berapa panjang tali tersebut (BD)?

Jawab:

a. Konsep fungsi trigonometri yang digunakan adalah fungsi tangent karena mencari panjang DC dengan diketahui panjang AC

$$\tan 30^o = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{CD}{6}$$

$$CD = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Jadi tinggi tiang bendera = tinggi anak + CD = $(1{,}5 + 2\sqrt{3})$ m

b. $\sin 60^o = \frac{CD}{BD}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{BD}$$

$$BD = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

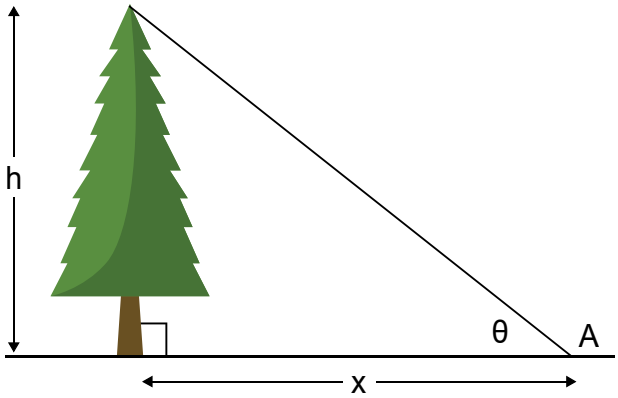
$$BD = 4 \text{ m}$$

KEGIATAN 3

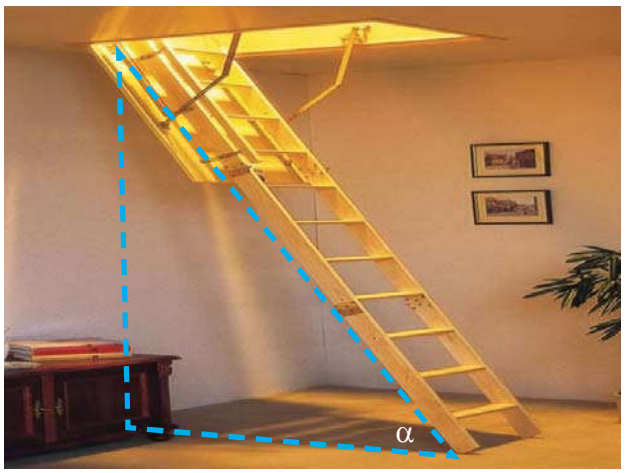
Pahami dari masalah kontekstual dibawah ini!

Selesaikan masalah kontekstual ini dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian!

a. Dari sebuah titik yaitu titik A di permukaan tanah, puncak dari sebuah pohon terlihat dengan sudut $\theta = 45^o$. Jarak horizontal dari titik A ke pohon sama dengan x = 15 m. Berapa meterkah tinggi pohon tersebut (h)?

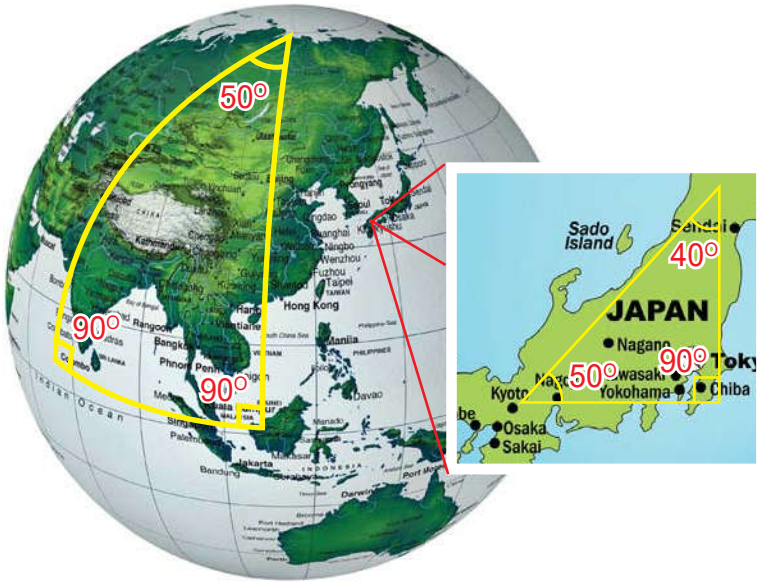


b. Sebuah tangga disandarkan di tembok yang mempunyai ketinggian 6 m (jarak dari alas ke atap) dengan panjang tangga tersebut sebesar 12 m. Berapakah sudut α yang terjadi antara ujung bawah tangga dengan alas rumah tersebut?

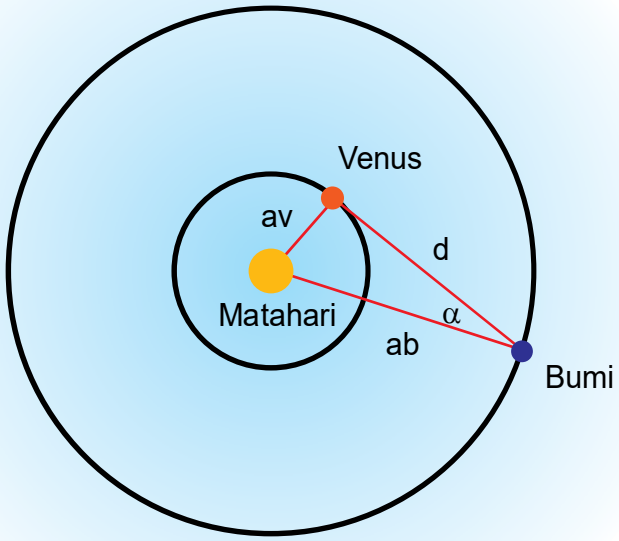


c. Seorang petani ingin mentaksir tinggi pohon yang ada di sawah. Dengan menggunakan alat bantu busur yang dia punya, petani tersebut berjalan di pematang sawah sejauh 10 meter dan mendapatkan sudut sebesar 45^o dengan melihat puncak dari pohon. Berapakah taksiran tinggi pohon tersebut?

d. Kota A, B dan C jika ditarik garis akan membentuk sebuah segitiga (sesuai dengan gambar). Jika Jarak dari A ke B sejauh 150 km, Berapa jarak dari B ke C dan dari A ke C? (dengan tan 40^o = …. dan sin 40^o = ….)



e. Antara bumi, matahari dan venus membentuk sudut sebesar 60^{o}. Jarak dari bumi ke matahari sebesar 150 juta km yang ditunjukkan dengan ab pada gambar. Sudut antara bumi, venus dan matahari membentuk sudut siku-siku. Dengan menggunakan konsep trigonometri, berapa jarak dari planet Bumi ke planet Venus dan berapa jarak dari Matahari ke Planet Venus?

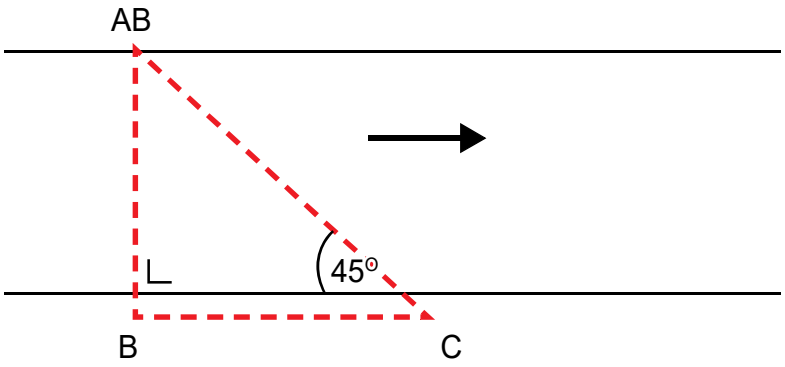


UNIT 2

PENERAPAN RASIO TRIGONOMETRI SUDUT-SUDUT BERELASI PADA BIDANG KONSTRUKSI

Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran dari unit ini adalah untuk menemukan rasio trigonometri dan menggunakan untuk sudut-sudut di berbagai kuadran beserta sifat-sifatnya, kemudian menggunakan rasio trigonometri untuk sudut-sudut berelasi serta menggunakan contoh atau peristiwa kontekstual, menemukannya dan menggunakan konsep tersebut dalam menyelesaikan soal.

Jembatan merupakan sarana yang sangat penting sebagai penghubung untuk akses antar lokasi pada daerah-daerah dengan banyak sungai, atau rintangan-rintangan seperti lembah dalam, alur sungai, danau, saluran irigasi, kereta api dan jalan raya yang melintang tidak sebidang. Saat ini, petani pada beberapa daerah masih menggunakan sungai untuk mengangkut hasil panen dengan menggunakan sampan misalkan di Kalimantan. Kita dapat menaksir panjang jembatan yang akan dibangun di atas sungai menggunakan konsep sudut trigonometri. Berikut ilustrasinya:



AB dimisalkan dengan panjang yang dibutuhkan, titik A diwakili dengan pohon/benda lain yang ada di seberang sungai yang digunakan sebagai acuan. BC adalah jarak yang sengaja dibuat untuk mentaksir panjang jembatan. Dengan menggunakan konsep diatas, diperoleh panjang AB dengan menggunakan sifat tangent.

$$\text{Tan C} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Tan } 45^{o} = \frac{AB}{BC}$$

$$BC.\ 1 = AB$$

Dengan menggunakan sudut 45^{o}, diperoleh bahwa panjang BC sama dengan panjang AB.

Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut disemua Kuadran

Sebagai sudut putar, sudut dapat dikelompokkan menjadi 4 wilayah atau kuadran didasarkan pada besarnya sudut, yaitu:

1. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 0^{o} sampai 900^{o} atau $0^{o} < \alpha_1 < 90^{o}$.
2. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 90^{o} sampai 180^{o} atau $90^{o} < \alpha_2 < 180^{o}$.
3. Sudut – sudut yang terletak di kuadran III, yaitu sudut- sudut yang besarnya antara $180^{o} < \alpha_3 < 270^{o}$.
4. Sudut – sudut yang terletak di kuadran IV, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara $270^{o} < \alpha_3 < 360^{o}$.

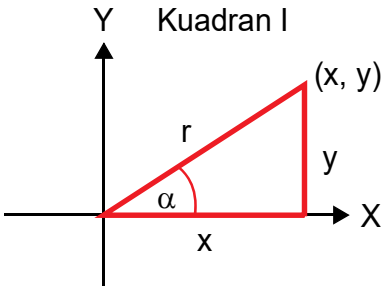
Jika digambarkan dalam koordinat kartesius diperoleh,

Untuk Kuadran I

$\text{Sin } \alpha = \frac{y}{r}$ (positif)

$\text{Cos } \alpha = \frac{x}{r}$ (positif)

$\text{Tan } \alpha = \frac{y}{x}$ (positif)

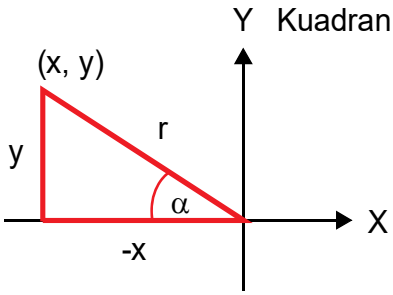


Untuk Kuadran II

$\text{Sin } \alpha = \frac{y}{r}$ (positif)

$\text{Cos } \alpha = \frac{-x}{r}$ (negatif)

$\text{Tan } \alpha = \frac{y}{-x}$ (negatif)

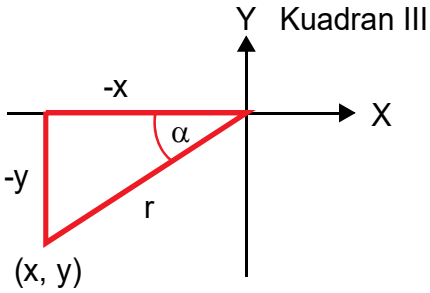


Untuk Kuadran III

$\text{Sin } \alpha = \frac{-y}{r}$ (negatif)

$\text{Cos } \alpha = \frac{-x}{r}$ (negatif)

$\text{Tan } \alpha = \frac{-y}{-x}$ (positif)

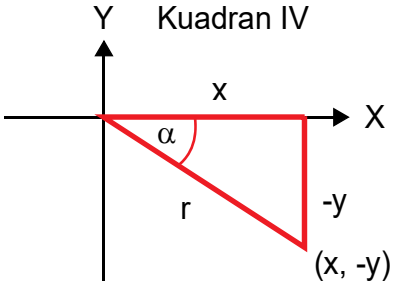


Untuk Kuadran IV

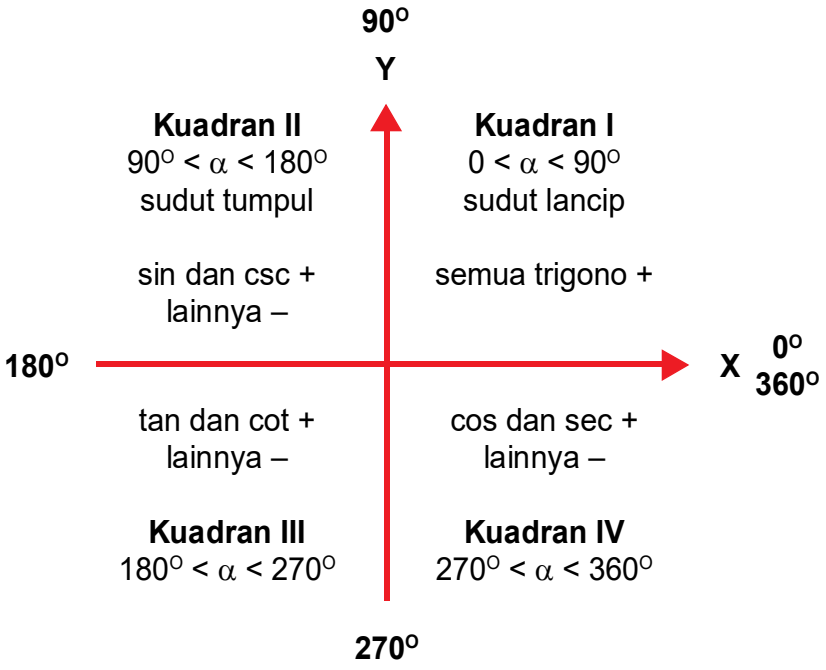
$\text{Sin } \alpha = \frac{-y}{r}$ (negatif)

$\text{Cos } \alpha = \frac{x}{r}$ (positif)

$\text{Tan } \alpha = \frac{-y}{x}$ (negatif)



Hasil-hasil diatas, untuk memudahkan dalam memahami dan menghafalkan dijadikan menjadi satu dalam sebuah tabel berikut ini.



Untuk memahami lebih mendalam tentang letak kuadran-kuadran, dijabarkan dalam contoh soal dibawah ini.

Contoh 1:

Manakah dibawah ini yang mempunyai hasil yang bertanda positif dan bertanda negatif!

a. sin 110^o
b. sin 310^o
c. tan 92^o
d. tan 181^o
e. cos 236^o
f. cos 272^o
g. sec 95^o
h. sec 330^o
i. cotan 20^o
j. cosec 175^o

Jawab:

a. sin 110^o bertanda positif, dikarenakan 110^o terletak di kuadran II
b. sin 310^o bertanda negatif, dikarenakan 310^o terletak di kuadran IV

c. tan 92^o bertanda negatif, dikarenakan 92^o terletak di kuadran II
d. tan 181^o bertanda positif, dikarenakan 181^o terletak di kuadran III
e. cos 236^o bertanda negatif, dikarenakan 236^o terletak di kuadran III
f. cos 272^o bertanda positif, dikarenakan 272^o terletak di kuadran IV
g. sec 95^o bertanda negatif, dikarenakan 95^o terletak di kuadran II
h. sec 330^o bertanda positif, dikarenakan 330^o terletak di kuadran IV
i. cotan 20^o bertanda positif, dikarenakan 20^o terletak di kuadran I
j. cosec 175^o bertanda positif, dikarenakan 175^o terletak di kuadran II

Contoh 2:

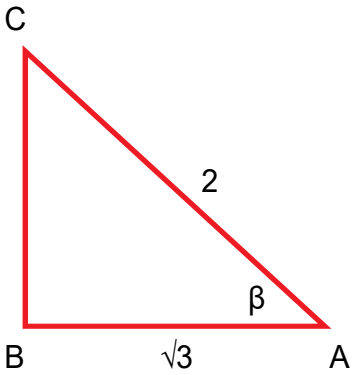
Diketahui cos β = ½ √3

Carilah :

a. sin β
b. tan β
c. sec β
d. cosec β

Jawab:

Karena tidak ada keterangan, maka sudut terletak di kuadran I



$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= 22 - (\sqrt{3})2$

$= 4 - 3$

$= 1$

$BC = \sqrt{1}$

$= 1$

Maka nilai dari

a. sin β $= \frac{BC}{AC} = ½$
b. tan β $= \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = ⅓ \sqrt{3}$
c. sec β $= \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = ⅔ \sqrt{3}$
d. cosec β $= \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$

Contoh 3:

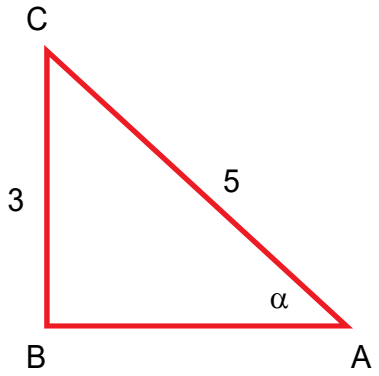
Diketahui Sin $\alpha = -\frac{3}{5}$ dan nilai Tan α bernilai positif.

Carilah nilai dari :

a. Cos α
b. Tan α
c. Sec α
d. Cosec α

Jawab:

Karena nilai sin bernilai negatif dan nilai tan bernilai positif maka sudut terletak di kuadran III, sehingga diperoleh:



Tanda negatif menunjukkan letak kuadran.

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 52 - 32$

$= 25 - 9$

$= 16$

$AB = \sqrt{16}$

$= 4$

Maka nilai dari

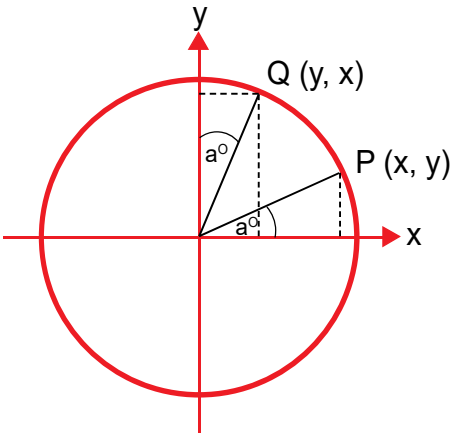
a. Cos α $= -\frac{AB}{AC} = -\frac{4}{5}$ (negatif)
b. Tan α $= \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$ (positif)
c. Sec α $= -\frac{AC}{AB} = -\frac{5}{4}$ (negatif)
d. Cosec α $= -\frac{AC}{BC} = -\frac{5}{3}$ (negatif)

KEGIATAN 1

Dengan menyelesaikan soal-soal dibawah ini, maka dapat memahami perbandingan trigonometri sudut-sudut di semua kuadran

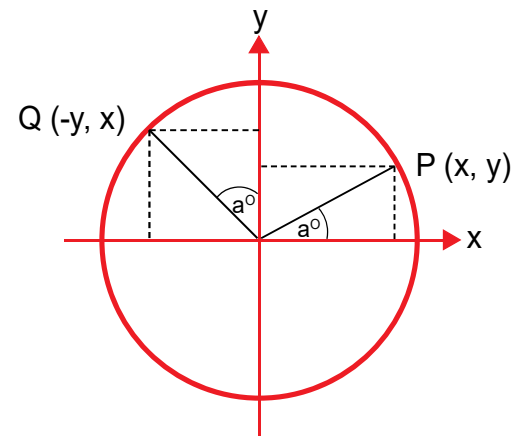
1. Sebutkan tanda-tanda (positif atau negatif) untuk hasil dari tiap perbandingan trigonometri berikut.
   a. tan 130^o
   b. tan 184^o
   c. sin 4^o
   d. cos 350^o
   e. sin 185^o
   f. sec 102^o
   g. cosec 21^o
   h. cotan 79^o
   i. sec 111^o
   j. cosec 222^o
2. Diketahui nilai dari Sin $\alpha = \frac{5}{13}$, Carilah nilai dari :
   a. Tan α
   b. Cosec α
   c. Sec α
   d. Cos α
3. Jika Sin $\alpha = \frac{12}{13}$ dan cos β

   Perbandingan sudut-sudut berelasi



Sudut (90^o - a^o)

sin (90^o - a^o) = cos a^o
cos (90^o - a^o) = sin a^o
tan (90^o - a^o) = cot a^o
cosec (90^o - a^o) = sec a^o
sec (90^o - a^o) = cosec a^o
cot (90^o - a^o) = tan a^o



Sudut ($90^o + a^o$)

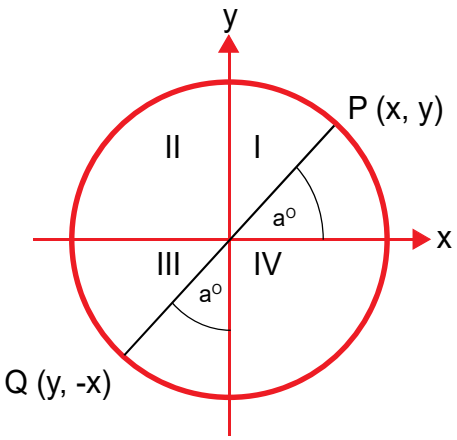
$\sin (90^o + a^o) = \cos a^o$
$\cos (90^o + a^o) = -\sin a^o$
$\tan (90^o + a^o) = -\cot a^o$
$\text{cosec} (90^o + a^o) = \sec a^o$
$\sec (90^o + a^o) = -\text{cosec}\, a^o$
$\cot (90^o + a^o) = -\tan a^o$

Keterangan:

Untuk sebuah sudut (90 - a) dan sudut (90 + a), dengan a disebut komplemen, berlaku:

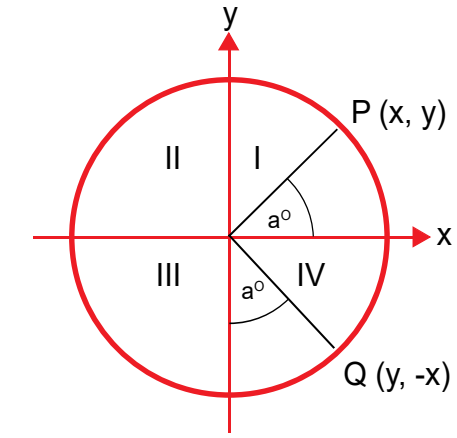
1. sinus sebuah sudut = cosinus sudut komplemennya.
2. tangen sebuah sudut = contangen sudut komplemennya
3. secan sebuah sudut = cosecan sudut komplemennya

Begitu pula sebaliknya.



Sudut ($270^o - a^o$)

$\sin (270^o - a^o) = -\cos a^o$
$\cos (270^o - a^o) = -\sin a^o$
$\tan (270^o - a^o) = \cot a^o$
$\text{cosec} (270^o - a^o) = -\sec a^o$
$\sec (270^o - a^o) = -\text{cosec}\, a^o$
$\cot (270^o - a^o) = \tan a^o$



Sudut ($270^o + a^o$)

$\sin (270^o + a^o) = -\cos a^o$
$\cos (270^o + a^o) = \sin a^o$
$\tan (270^o + a^o) = -\cot a^o$
$\text{cosec} (270^o + a^o) = -\sec a^o$
$\sec (270^o + a^o) = \text{cosec}\, a^o$
$\cot (270^o + a^o) = -\tan a^o$

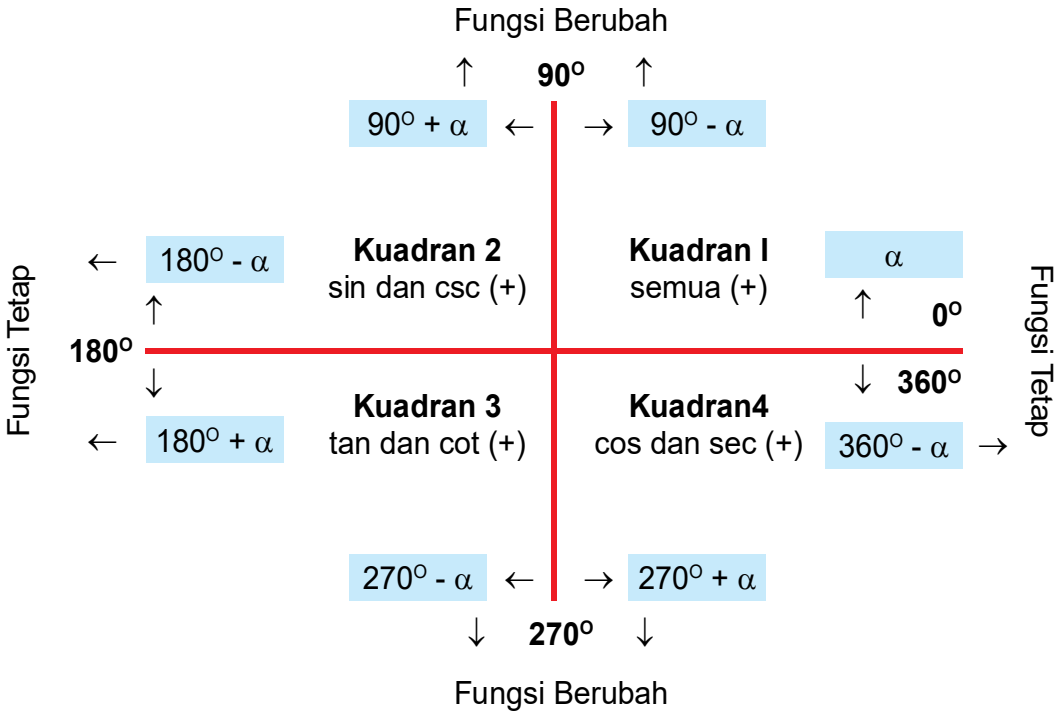
Keterangan:

Untuk sudut (270^o - a^o) dan (270^o + a^o) berlaku:

1. sinus sebuah sudut = cosinus sudut relasinya
2. sec sebuah sudut = cosec sudut relasinya
3. tan sebuah sudut = cot sudut relasinya

Dan begitu sebaliknya dengan menyesuaikan tanda negatif atau positif sesuai kuadrannya.

Jika digabung dalam bentuk tulisan, diperoleh gambar dibawah ini untuk memudahkan dalam memahami dan mengetahui sudut-sudut berelasi.



Dibawah ini akan diberikan beberapa contoh rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (90^o - α^o) dan sudut (90^o + α^o)

Contoh 4:

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini dalam perbandingan sudut komplemennya..

a. sin 36^o
b. tan 73^o
c. cos 57^o
d. sec 32^o

Jawab:

a. $\sin 36^o = \sin (90^o - 54^o) = \cos 54^o$
   Jadi, nilai $\sin 36^o = \cos 54^o$

b. $\tan 73^o = \tan (90^o - 17^o) = \text{cotan } 17^o$
   Jadi, nilai $\tan 73^o = \text{cotan } 17^o$

c. $\cos 57^o = \cos (90^o - 33^o) = \sin 33^o$
   Jadi, nilai $\cos 57^o = \sin 33^o$

d. $\sec 32^o = \sec (90^o - 58^o) = \text{cosec } 58^o$
   Jadi, nilai $\sec 32^o = \text{cosec } 58^o$

Contoh 5:

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini dalam perbandingan trigonometri sudut pelurusnya!

a. $\tan 150^o$
b. $\sin 120^o$
c. $\cos 135^o$
d. $\text{cosec } 150^o$

Jawab:

a. $\tan 150^o = \tan (180^o - 30^o) = -\tan 30^o = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
b. $\sin 120^o = \sin (180^o - 60^o) = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $\cos 135^o = \cos (180^o - 45^o) = -\cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
d. $\text{cosec } 150^o = \text{cosec } (180^o - 30^o) = \text{cosec } 30^o = 2$

KEGIATAN 2

Lihatlah langkah-langkah penyelesaian sesuai modul diatas!

Selesaikan permasalahan dibawah dengan langkah-langkah penyelesaian

1. Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(90 + \alpha)$, hitunglah nilai dari tiap perbandingan trigonometri berikut ini!
   a. $\sin 135^o$
   b. $\sin 150^o$

c. tan 135^{o}
d. cos 120^{o}
e. cos 150^{o}

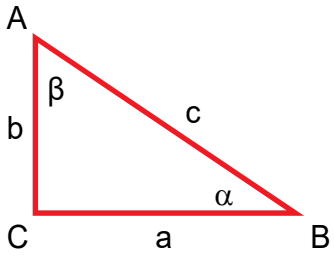
2. Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (180 + α), hitunglah nilai dari tiap perbandingan trigonometri berikut ini!
   a. sin 210^{o}
   b. sin 225^{o}
   c. cos 240^{o}
   d. tan 240^{o}

3. Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (180 + α), hitunglah nilai dari tiap perbandingan trigonometri berikut ini!
   a. sin 210^{o}
   b. sin 225^{o}
   c. cos 240^{o}
   d. tan 240^{o}

Rangkuman

1. Perbandingan atau rasio trigonometri:

   Panjang sisi dihadapan sudut A adalah a, panjang sisi dihadapan sudut B adalah b dan panjang sisi dihadapan sudut C adalah c. sisi a dan sisi b dinamakan sisi siku-siku sedangkan sisi c dinamakan hipotenusa.



$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi di hadapan sudut } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi di dekat sudut } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{a}$$

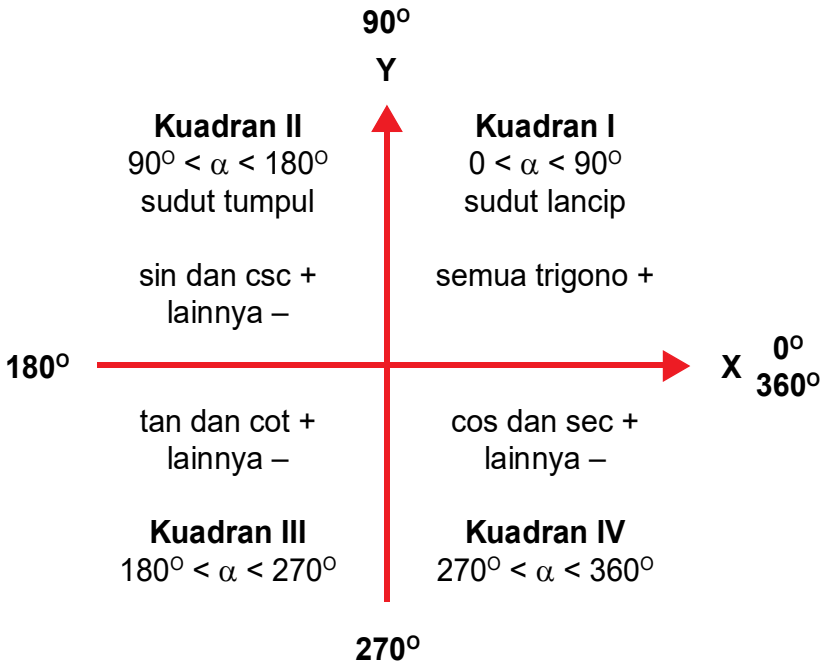
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \quad \text{cotan } \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$$

2. Besar nilai sudut-sudut istimewa untuk 0^o, 30^o, 45^o, 60^o dan 90^o adalah sebagai berikut.

Perbandingan Trigonometri	Sudut-sudut Khusus (Istimewa)				
	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	½	½√2	½ √3	1
cos	1	½ √3	½√2	½	0
tan	0	⅓ √3	1	√3	tak terdefinisi
cosec	tak terdefinisi	2	√2	⅔ √3	1
sec	1	⅔ √3	√2	2	tak terdefinisi
cotan	tak terdefinisi	√3	1	½ √3	0

3. Sudut-sudut dikelompokkan menjadi 4 wilayah atau kuadran didasarkan pada besarnya sudut, yaitu:
   a. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 0^o sampai 90^o atau $0^o < \alpha_1 < 90^o$.
   b. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 90^o sampai 180^o atau $90^o < \alpha 2 < 180^o$.
   c. Sudut – sudut yang terletak di kuadran III, yaitu sudut- sudut yang besarnya antara $180^o < \alpha_3 < 270^o$.
   d. Sudut – sudut yang terletak di kuadran IV, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara $270^o < \alpha_3 < 360^o$.

4. Jika, digambarkan dalam koordinat cartesius akan terlihat letak-letak kuadran tersebut beserta nilai trigonometrinya.



KRITERIA PINDAH MODUL

Kriteria pindah/lulus modul jika peserta didik setelah memenuhi syarat berikut.

1. Menyelesaikan seluruh materi pembelajaran;
2. Mengerjakan seluruh latihan soal/penugasan;
3. Mendapat nilai ketuntasan belajar ≥75 dari penilaian akhir modul;
4. Apabila nilai masih dibawah kriteria ketuntasan belajar maka dilakukan remedial
5. Bagi peserta didik yang nilai penilaian akhir modul ≥75, maka bisa melanjutkan ke modul selanjutnya

Berdasarkan hasil analisis penilaian akhir modul, peserta didik yang belum mencapai ketuntasan belajar diberi kegiatan pembelajaran remedial dalam bentuk;

1. Bimbingan perorangan jika peserta didik yang belum tuntas ≤ 20%;
2. Belajar kelompok jika peserta didik yang belum tuntas antara 20% dan 50%; dan
3. Pembelajaran ulang jika peserta didik yang belum tuntas ≥ 50%.

Pendidik/tutor memberikan remedial kepada peserta didik yang belum mencapai kompetensi dasar yang diharapkan. Berikut alternatif remedial yang bisa diberikan.

1. Pendidik/tutor membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menemukan konsep trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku dari masalah kontekstual.
2. Pendidik/tutor membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menentukan, menggunakan, dan menyelesaikan masalah rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) dalam menyelesaikan soal.
3. Pendidik/tutor membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menggunakan rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran.
4. Pendidik/tutor membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menggunakan rasio trigonometri untuk sudut-sudut berelasi.

Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait modul 4, maka diharapkan mencari sumber lain atau referensi selain dari modul ini. Saran referensi untuk mendukung penambahan wawasan tersebut adalah sebagai berikut:

1. https://www.youtube.com/watch?v=Q9xTOPL25Wc untuk konsep tentang trigonometri;
2. https://www.youtube.com/watch?v=lstd_Kyc1QY untuk konsep dasar dari trigonometri;
3. https://www.youtube.com/watch?v=th6gC6v5oQ0 untuk cara menghafal dengan mudah hasil trigonometri dari sudut-sudut istimewa;
4. https://www.youtube.com/watch?v=cs3nFfWJ_BQ untuk kuadran dan perbandingan sudut-sudut berelasi;
5. https://www.youtube.com/watch?v=l8LoBagJ_gk untuk penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari;
6. Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas X SMA/SMK, Kemdikbud, 2016
7. Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

BK. Noormandiri, Endar. 1995. Buku Pelajaran Matematika Untuk SMU Kelas 2. Jakarta: Erlangga

Sterling, Mary Jane. 2005. Aljabar FOR DUMMIES®. Bandung: PT. Intan Sejati

Siswanto. 2005. Matematika Inovatif 1 Konsep dan Aplikasinya. Solo : PT Tiga Serangkai

Siswanto. 2005. Matematika Inovatif 2 Konsep dan Aplikasinya untuk kelas XI

SMA dan MA Program IPS&Bahasa. Solo : PT Tiga Serangkai Pustaka Mandir

Wirodikromo, Sartono. Matematika untuk SMA Kelas X Semester 2. Jakarta : Erlangga

Wirodikromo, Sartono. Matematika untuk SMA Kelas XI Semester 2. Jakarta : Erlangga

Zamdy & Jonathan. 2001. CliffQuickReviewTMCalculus. New York : Hungry Mind.Inc

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 5

Penerapan Trigonometri dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi dalam Kehidupan Sehari-hari

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Matematika Paket C Tingkatan V Modul Tema 5
Modul Tema 5 : Penerapan Trigonometri dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi dalam Kehidupan Sehari-hari

- Penulis: Rain Adhistya

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

vi+ 80 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar..... ii
Daftar Isi iii
Petunjuk Penggunaan Modul..... 1
Tujuan Pembelajaran Modul 2
Pengantar Modul 2
UNIT 1 SATUAN SUDUT 4
A. Mengenal Sudut 4
Latihan 1 6
B. Mengenal Satuan Sudut Radian 8
Latihan 2 10
UNIT 2 PERBANDINGAN TRIGONOMETRI 11
A. Perbandingan Sisi-sisi Pada Segitiga Siku-siku 11
Latihan 1 15
Latihan 2 18
Latihan 3 19
Latihan 4 20
Latihan 5 21
UNIT 3 PERSAMAAN DAN FUNGSI TRIGONOMETRI 22
A. Fungsi Sinus 23
Penugasan 1..... 23
B. Fungsi Cosinus 24
Penugasan 2 25
C. Fungsi Tangen 26
Penugasan 3 27
Latihan 1 28
UNIT 4 IDENTITAS TRIGONOMETRI 30
Latihan 1 31
UNIT 5 MERANCANG MODEL MATEMATIKA UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH TRIGONOMETRI 32
Latihan 1 35

UNIT 6 ATURAN SINUS DAN COSINUS 36
A. Aturan Cosinus 38
B. Penggunaan Aturan Sinus 39
Latihan 1 40
UNIT 7 COSINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT 41
UNIT 8 SINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT 45
A. Rumus Tangen dari Jumlah dan Selisih Dua Sudut 47
Latihan 1 49
B. Rumus Trigonometri dari Sudut Ganda atau
Sudut Rangkap 50
UNIT 9 JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS 53
Latihan 1 55
Rangkuman 57
Kunci Jawaban 60
Kriteria Pindah Modul 79
Saran Referensi 80
Daftar Pustaka 80

PENERAPAN TRIGONOMETRI DALAM PENGEMBANGAN ILMU DAN TEKNOLOGI DAN KEHIDUPAN SEHARI-HARI

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang konsep dan operasi matematika menggunakan aturan sinus dan cosinus, fungsi trigonometri serta penerapan, penggunaan dan penyelesaian masalah yang melibatkan trigonometri dalam aktifitas sehari-hari di rumah, lingkungan tempat tinggal, dan di masyarakat. Sebelum mempelajari modul ini, Anda sudah harus menguasai *materi prasyarat* yaitu tentang konsep pengukuran dan satuan sudut, sifat-sifat sudut dan perbandingan sisi-sisi pada segitiga.

Untuk memastikan tingkat penguasaan, Anda dapat mengerjakan latihan operasi hitung yang melibatkan fungsi aljabar yang dikenalkan di awal modul. Cara belajar dengan menggunakan modul dapat dilakukan secara mandiri (tanpa bantuan tutor/pendidik), melalui tutorial, atau menggunakan pembelajaran tatap muka seperti yang dilaksanakan dalam sekolah formal. Tata cara penggunaan modul adalah sebagai berikut.

a. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan tutor
b. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
c. Mengidentifikasi materi-materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan tutor, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama tutor
d. Melaksanakan tugas-tugas dalam modul dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
e. Mengerjakan soal dan latihan dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran pembelajaran
f. Mengerjakan soal penilaian akhir modul untuk lebih memahami materi pembelajaran dengan benar
g. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan tugas karena keterbatasan sarana, prasarana, alat, media dan bahan belajar yang diperlukan, maka Anda dapat berkonsultasi dengan rekan sejawat untuk merancang tugas alternative yang setara

h. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan soal, latihan dan penilaian akhir modul, maka Anda dapat menggunakan rubrik penilaian, kunci jawaban dan pembahasan yang diberikan diakhir modul agar lebih memahami. Kerjakan ulang soal, latihan dan penilaian akhir sampai Anda yakin tidak mengalami kesulitan mengerjakan soal
i. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami lebih lanjut uraian materi, melaksanakan tugas pembelajaran, latihan dan soal yang diberikan belum cukup membuat Anda menguasai kompetensi yang diharapkan, maka Anda perlu mempelajari lebih lanjut referensi dan daftar pustaka suatu materi pembelajaran

Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

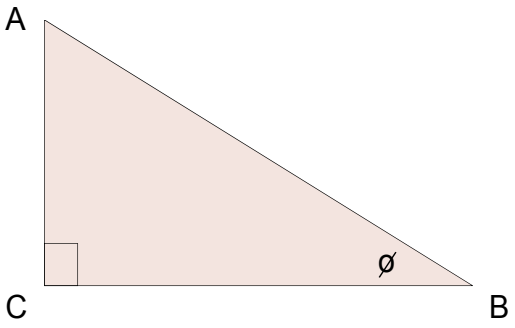
1. Memahami konsep perbandingan trigonometri, aturan sinus dan cosinus, dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan aturan sinus dan cosinus serta penggunaannya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sehari-hari

Pengantar Modul

Banyak benda atau bangunan memiliki sudut atau pojok tertentu. Bentuk-bentuk sudut dari benda di alam terbentuk dengan sendirinya, seperti sudut dahan dengan ranting, lekukan batuan, dan sebagainya. Bentuk sudut ada yang sengaja dirancang, seperti penggaris berbentuk segitiga, sudut antara dua ruas jalan yang bersilangan, sudut yang terbentuk antara jarum pendek dan jarum panjang dari sebuah jam dinding, bentuk permukaan buku. Model atap rumah biasanya dibuat dengan sudut atau pojok sesuai kebutuhan. Titik sudut sebuah buku biasanya tegak lurus, sedangkan atap rumah sudutnya lebih kecil. Ilmu ukur sudut dipelajari secara khusus dalam trigonometri yang mengkaji hubungan antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga dan sifat-sifat serta aplikasinya dalam berbagai bidang seperti penaksiran tinggi gedung atau pohon, jarak mendatar puncak gunung terhadap lembahnya, dan sebagainya. Pada mulanya, trigonometri diterapkan dalam navigasi, survei dan pemetaan, dan astronomi, yang menekankan pada penentuan jarak secara tidak langsung. Aplikasi lainnya diterapkan pada fisika, kimia, *engineering* atau keteknikan, teknik sipil, astronomi, ilmu ukur tanah (topografi), teknik kimia,

optic, oseanografi, teknologi pencitraan dalam bidang kedokteran, khususnya pada penentuan fenomena atau gejala yang bersifat periodik seperti getaran, aliran listrik dan sebagainya.

Satuan sudut yang biasa digunakan adalah derajat (menggunakan simbol ^{o}) dan radian (tanpa simbol). Perhatikan perbandingan segitiga siku-siku berikut.



Besar sudut B, atau $\angle ABC$ adalah ϕ, maka perbandingan sisi yang *dihadapi* sudut ϕ terhadap *sisi miring* disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan *sisi dekat* dari sudut ϕ terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot), yang didefinisikan sebagai berikut.

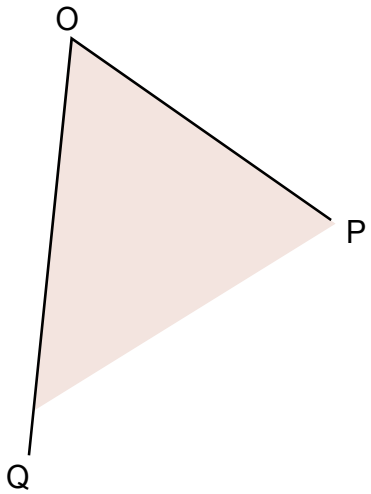
$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}; \cot \phi = \frac{1}{\tan \theta} \qquad \sec \phi = \frac{1}{\cos \theta}; \text{dan } \csc \phi = \frac{1}{\sin \theta}$$

UNIT 1 SATUAN SUDUT

Mengenal Sudut

1. Apakah pojok dari benda berikut ini, tegak lurus, tidak tegak lurus atau tidak memiliki pojok.
   a. Kubus/balok
   b. Kerucut
   c. Bola
   d. Kardus
   e. Almari
2. Lukislah berbagai benda dengan pojok atau sudut tegak lurus, kecil atau lebar. Bagaimana cara menggambar sudut-sudut tersebut? Jelaskan.
3. Sebuah atap rumah membentuk sudut. Apabila terjadi hujan, maka air hujan mengenai atap. Air hujan akan jatuh m elalui atap lebih cepat pada atap dengan sudut kecil atau yang lebih besar? Jelaskan.

Sekarang kita siap membahas konsep sudut melalui ilustrasi berikut. Perhatikan sudut QOP.



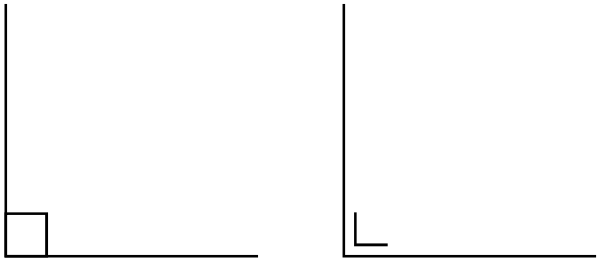
Garis OQ dan OP disebut kaki-kaki sudut dan titik O merupakan titik sudut. Daerah yang dibatasi oleh kaki sudut disebut dengan daerah sudut, dan ukuran besarnya daerah sudut disebut dengan besar sudut.

Garis OQ dan OP membentuk sudut yang disebut dengan sudut POQ, sudut QOP, atau sudut O dan dilambangkan oleh $\angle$ POQ, $\angle$ QOP, atau $\angle$ O.

Perhatikan bahwa nama atau lambang titik sudut, yaitu titik O selalu ditulis ditengah. Kaki-kaki sudut tersebut membatasi dua daerah, yaitu daerah dalam yang berasir dan daerah luar yang

tidak berarsir. Untuk selanjutnya, kita menganggap yang dimaksud besar sudut adalah sudut pada *daerah dalam*nya saja kecuali bila disebutkan secara lain. Berdasarkan karakteristik besar sudutnya, terdapat berbagai bentuk sudut, seperti gambar berikut.

Pada gambar di atas, sudut D dan F kita sebut dengan sudut siku-siku yang dibentuk oleh dua garis tegak lurus sebagai kaki-kaki sudutnya. Simbol untuk menyatakan sudut siku-siku biasanya adalah "⌐" atau "□", yang diletakkan pada titik sudutnya. Besar sudut B dan E disebut sudut lancip yang besar sudutnya lebih kecil dari sudut siku-siku. Sedangkan sudut A dan C disebut sudut tumpul yang besar sudutnya lebih besar dari sudut siku-siku.

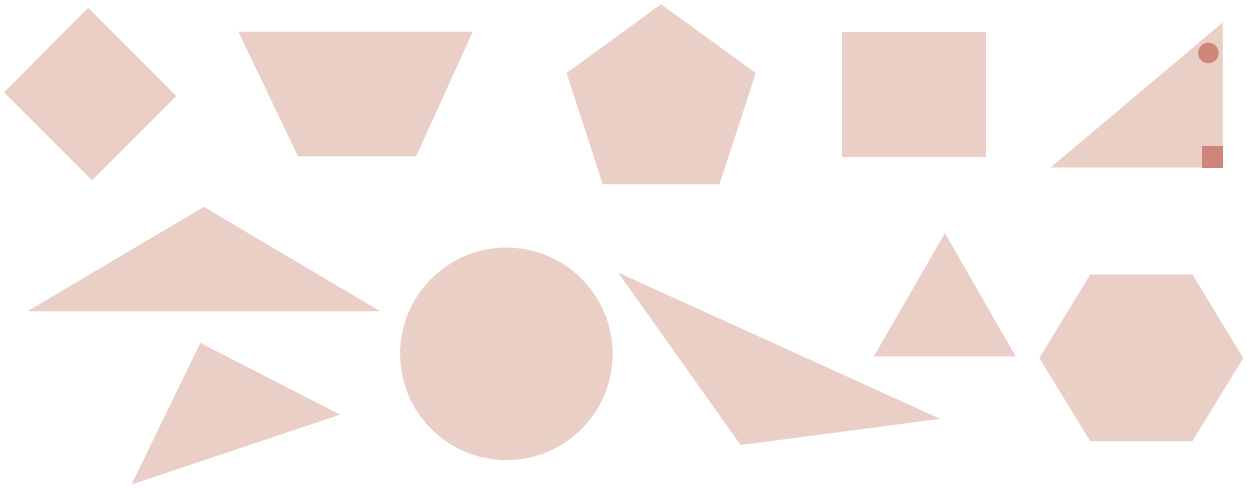


Sudut siku-siku

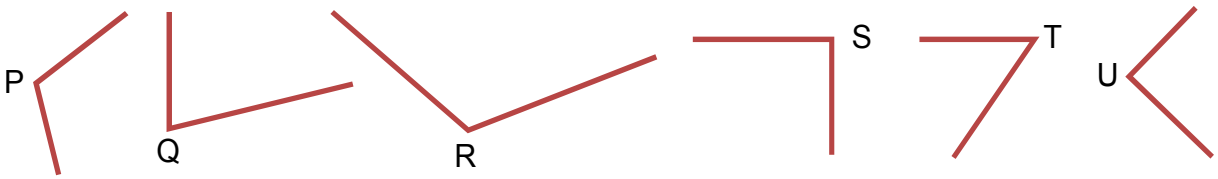
Agar dalam mengukur sudut dihasilkan acuan satuan sudut yang sama, diperlukan satuan standar atau baku untuk sudut. Satuan standar yang biasa digunakan adalah satuan derajat (*degree*). Satuan ini diperoleh dari daerah lingkaran yang dibagi dalam menjadi 360 bagian yang sama dari titik pusatnya. Besar setiap bagiannya adalah 1 derajat dan ditulis 1^0.

Latihan 1

1. Tandai setiap sudut pada bangun berikut dengan:
   “o” untuk sudut lancip,
   “x” untuk sudut tumpul, dan
   “□” untuk sudut siku-siku.



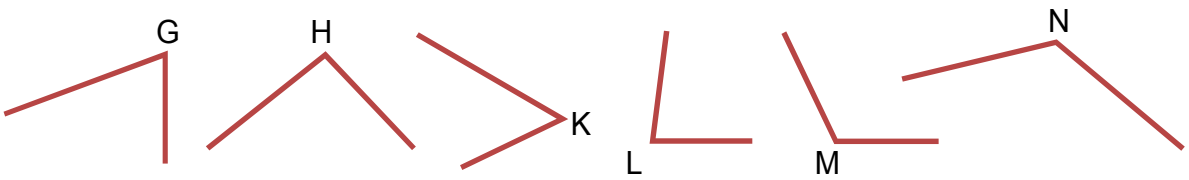
2. Ambillah busur derajat dan ukur besar sudut berikut



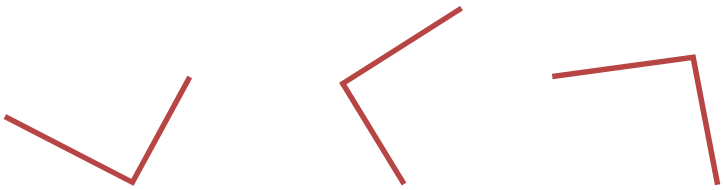
Sudut P = … derajat = …^{0}
Sudut Q = … derajat = …^{0}
Sudut R = … derajat = …^{0}

Sudut S = … derajat = …^{0}
Sudut T = … derajat = …^{0}
Sudut U = … derajat = …^{0}

3. Taksirlah berbagai sudut berikut. Kemudian periksa ketelitian taksiranmu dengan mengukurnya.



4. Gambarlah berbagai sudut:
   a. sebesar 30^0
   b. sebesar 45^0
   c. sebesar 90^0
   d. sebesar 120^0
5. Gambarlah berbagai bentuk sudut yang besarnya 150^0.
   Apakah bangun dengan sudut 150^0 sama dengan bangun dengan sudut 240^0? Jelaskan.
   Gambarlah sudut sebesar:
6. 0^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
   a. 180^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
   b. 225^0. Bagaimana cara Anda menggambarnya? Jelaskan.
   c. 270^0. Bagaimana cara Anda menggambarnya? Jelaskan.
   d. 360^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
7. Ukurlah besar berbagai bentuk sudut siku-siku berikut.



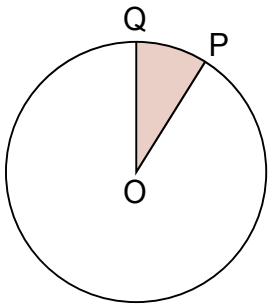
   Apa kesimpulan Anda? Jelaskan.
8. Gambarlah pasangan sudut-sudut berikut.
   a. Sudut 45^0 dan 315^0.
   b. Sudut 90^0 dan 270^0.
   c. Sudut 60^0 dan 300^0.
   Apa kesimpulan Anda? Jelaskan.
9. Atap sebuah rumah membentuk sudut 70^0 dengan arah mendatar.
   a. Gambarkan skema atap rumah tersebut.
   b. Tentukan besar sudut pada puncak rumah tersebut.
10. Sebuah tangga menyandar di dinding dan membentuk sudut 65^0 dengan arah mendatar. Tentukan besar sudut tangga dengan dinding.

(a) Besar sudut siku-siku adalah 90^0.
(b) Sudut 0^0 membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus

Selain derajat, satuan sudut yang banyak digunakan dalam matematika atau perhitungan teknik lainnnya adalah satuan radian.

Mengenal Satuan Sudut Radian

1. Gambarlah lingkaran berpusat O dengan jari-jari OP = 7 cm seperti gambar berikut.



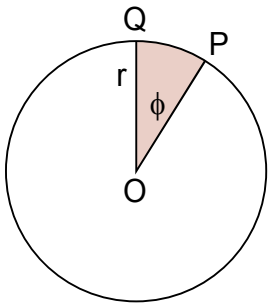
2. Ukurlah berbagai panjang busur PQ dan besar sudut QOP dengan menggunakan benang.
3. Isilah hasilnya pada tabel berikut.

No	Panjang Busur PQ	$\phi = \frac{busur\ PQ}{jari\text{-}jari}$	Besar Sudut QOP (x^0)
1			
2			
3			
4			
5			

(d) Apa hubungan nilai ϕ dan x^0? Jelaskan.

(a) Dengan menggunakan berbagai panjang busur PQ, tentukan nilai $\frac{180^0}{x^0}\ \phi$. Apa kesimpulan Anda?

Dari kegiatan di atas, dapat disimpulkan bahwa besaran ϕ dapat digunakan untuk menentukan ukuran atau besar sudut QOP. Kita katakan satuan sudut untuk ϕ dinyatakan dalam radian seperti yang dijelaskan pada bagian berikut.

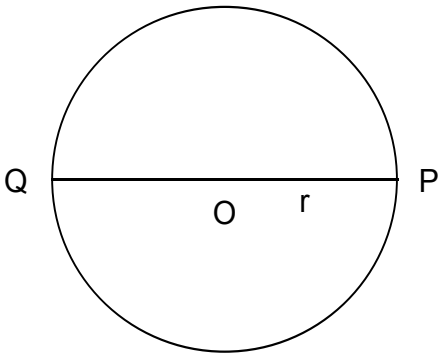


Besar sudut QOP dalam radian didefinisikan sebagai perbandingan panjang busur PQ terhadap jari-jari lingkaran OA. Jadi,

$$\text{besar } \angle QOP = \phi = \frac{\textit{busur yang dihadapi}}{\textit{jari-jari OP}} = \frac{\textit{busur PQ}}{r}$$

Besar sudut ϕ tersebut merupakan besaran tanpa dimensi karena merupakan hasil bagi besaran dengan satuan yang sama.

Bagaimana hubungan radian dan derajat? Apabila busur PQ diperpanjang menjadi setengah keliling lingkaran diperoleh sebagai berikut.



Sudut QOP merupakan sudut lurus dengan besar 180^0 dan panjang busur PQ = setengah keliling lingkaran = $\frac{1}{2} \times (2\pi r) = \pi r$. Jadi, besar sudut QOP dalam radian adalah

$$= \frac{\textit{busur PQ}}{r} = \frac{\pi}{r} = \pi$$

Dapat disimpulkan bahwa $180^0 = \pi$ (dalam radian).

Dari hubungan ini, kita dapat menyatakan besar sudut dari derajat ke radian dan sebaliknya.

Contoh 1:

Berapa derajatkah besar sudut sebesar 1 radian?

Penyelesaian:

Misalkan jawabnya adalah x. Kita gunakan perbandingan senilai sebagai berikut.

$180^0 \quad \propto \quad \pi$

$x \quad \propto \quad 1$

Sehingga, $180^0 \times 1 = \pi x$. Akibatnya,

$x = 180^0/\pi = 57.296^0$.

Jadi, 1 radian = 57.296^0.

Contoh 2:

Berapa radian besar sudut sebesar 45 derajat?

Penyelesaian:

Misalkan jawabnya adalah x. Kita gunakan perbandingan senilai sebagai berikut.

$$180^0 \quad \propto \quad \pi$$
$$45^0 \quad \propto \quad x$$

Sehingga, $180^0 \times x = 45^0 \times \pi$. Akibatnya,

$$x = \frac{45^0}{180^0}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

Jadi, $45^0 = \frac{1}{4}\pi$

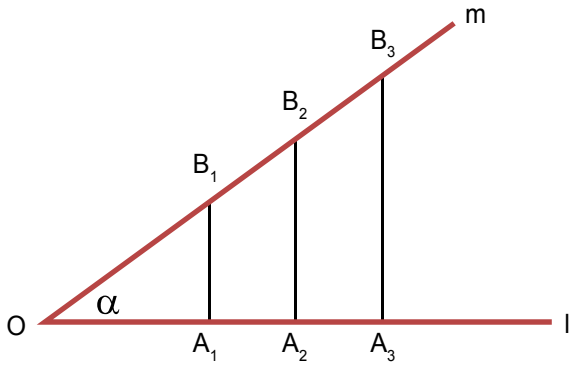
Latihan 2

1. Nyatakan sudut berikut dalam radian
   a. 270^0
   b. 0^0
   c. 360^0
   d. -45^0
2. Berapa radian jarak putar jarum menit sebuah jam apabila ia berputar selama
   a. a. 15 menit
   b. b. 30 menit
   c. c. 45 menit
   d. d. 60 menit
   e. 1 menit
   f. 90 menit
   g. 30 detik
   h. 1 jam
3. Berapa radian sudut yang dibentuk oleh jarum panjang dan jarum pendek sebuah jam pada pukul :
   a. 09.00
   b. 06.00
   c. 03.00
   d. 12.00
   e. 06.30
   f. 09.30

UNIT 2 PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Perbandingan Sisi-sisi Pada Segitiga Siku-siku

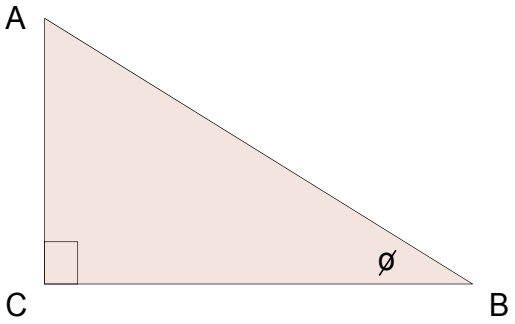
Sekarang perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku, seperti gambar berikut.



Garis l dan m berpotongan di O dan membentuk sudut sebesar α (di baca 'alfa'). Garis A_1B_1, A_2B_2, dan A_3B_3 adalah tegak lurus dengan garis l.

a. Jiplaklah gambar di atas dan ukur panjang OB_1, OB_2, dan OB_3 serta panjang garis OA_1, OA_2, dan OA_3
b. Ukurlah besar sudut α. Tentukan perbandingan $A_1B_1 : OB_1$, $A_2B_2 : OB_2$, dan $A_3B_3 : OB_3$. Apakah kesimpulan Anda? Jelaskan.
c. Apabila nilai α berubah apakah perbandingan sisi-sisi tersebut juga berubah? Jelaskan.

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku yang dihadapi suatu sudut adalah tertentu. Perhatikan gambar berikut.



Besar sudut B adalah ϕ (dalam radian). Perbandingan sisi yang dihadapi sudut ϕ terhadap sisi miring disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan sisi dekat sudut pkn terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Jadi,

$$\sin \phi = \frac{\text{sisi hadap}}{\text{sisi miring}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos \phi = \frac{\text{sisi dekat}}{\text{sisi miring}} = \frac{BC}{AB}$$

Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot), yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{AC}{BC}; \quad \cot \phi = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \phi = \frac{1}{\cos \theta}; \text{ dan } \csc \phi = \frac{1}{\sin \theta}$$

Perhatikan contoh beberapa nilai trigonometri dari beberapa jenis sudut tertentu, yang dicari dengan cara berikut.

Sudut 30^0 dan 60^0

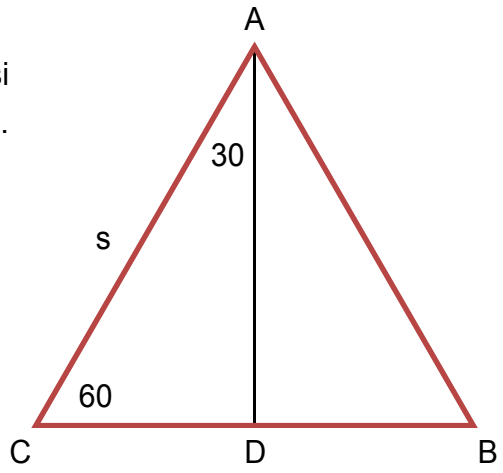
Segitiga ABC merupakan segitiga sama sisi dengan sisi s dan garis AD adalah garis tinggi sehingga CD = DB. Akibatnya,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$AD^2 = s^2 - (\frac{1}{2}BC)^2$

$= s^2 - (\frac{1}{2}s)^2 = \frac{3}{4} s^2$

$AD = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$



Menurut definisi, diperoleh

$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{s} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s}{s} = \frac{1}{2}$$

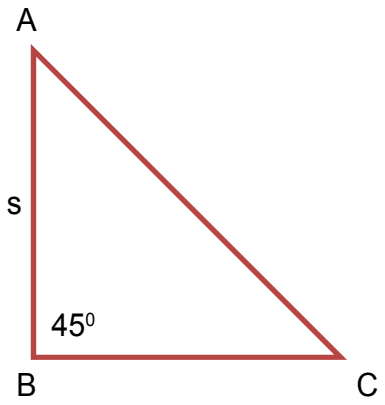
$$\tan 60^0 = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{\frac{1}{2}s} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s}{s} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{s} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^0 = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}s\sqrt{3}} = 1/3\sqrt{3}$$

Sudut 45^0



Segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki yang siku-siku di B. Sisi AB = sisi BC = s. Akibatnya, sudut A = sudut C dan

AC2 = AB2 + BC2

= s2 + s2 = 2s2

AC = $s\sqrt{2}$ Menurut definisi, diperoleh

$$\sin 450 = \frac{AB}{AC} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \text{½}\sqrt{3}$$

$$\cos 450 = \frac{BC}{AC} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \text{½}\sqrt{3}$$

$$\tan 450 = \frac{AB}{BC} = \frac{s}{s} = 1$$

Sudut 0^0 dan 90^0

Secara geometris, segitiga siku-siku dengan salah satu sudut lainnya 0^0 atau 90^0 akan berbentuk garis lurus sehingga nilai trigonometrinya adalah sebagai berikut.

$\sin 0^0 = 0$	$\sin 90^0 = 1$
$\cos 0^0 = 1$	$\cos 90^0 = 0$
$\tan 0^0 = 0$	$\tan 90^0$ = tak didefinisikan.

Nilai trigonometri dari sebuah sudut dapat dicari dengan menggunakan tabel trigonometri atau dengan menggunakan kalkulator ilmiah (*scientific calculator*). Yang perlu dicermati, kita harus menentukan dulu satuan sudut yang digunakan. Satuan derajat menggunakan simbol " ^{0} ", sedangkan radian tidak menggunakan satuan ukuran (tanpa dimensi).

Contoh:

Tentukan nilai trigonometri berikut.

a. $\sin 45^0$	c. $\cos 20^0$
b. sec 0.45	d. tan 1.2

Penyelesaian:

Dengan melihat satuan yang digunakan, kita dapat menentukan nilai trigonometrinya melalui kalkulator, sebagai berikut.

a. $\sin 45^0$ = 0.70711

$$\text{b. } \sec 0.45 = \frac{1}{\cos 0.45} = \frac{1}{0.90045} = 1.11056$$

c. $\cos 20^0$ = 0.9397

d. tan 1.2 = 2.572152

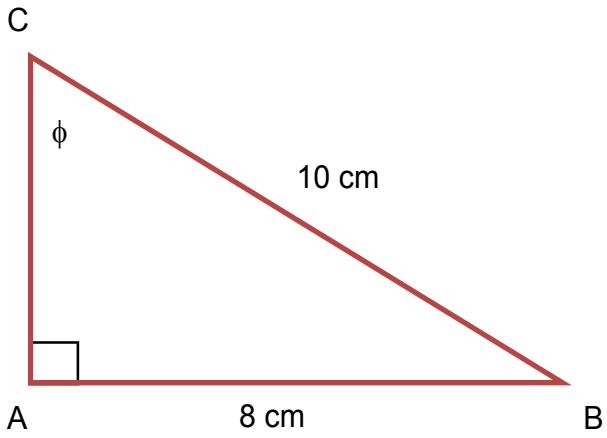
Contoh:

Perhatikan segitiga ABC yang siku-siku di A berikut. Tentukan:

a. Panjang AB

b. sin ϕ, cos ϕ dan tan ϕ

c. cot ϕ, sec ϕ dan csc ϕ



Penyelesaian:

Dengan menggunakan dalil Pythagoras, diperoleh

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

$= 10^2 - 8^2 = 36$

$AB = \sqrt{36} = 6$

Jadi, panjang AB adalah 6 cm

$$\sin\phi = \frac{\textit{sisi hadap}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos\phi = \frac{\textit{sisi dekat}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\phi = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$$

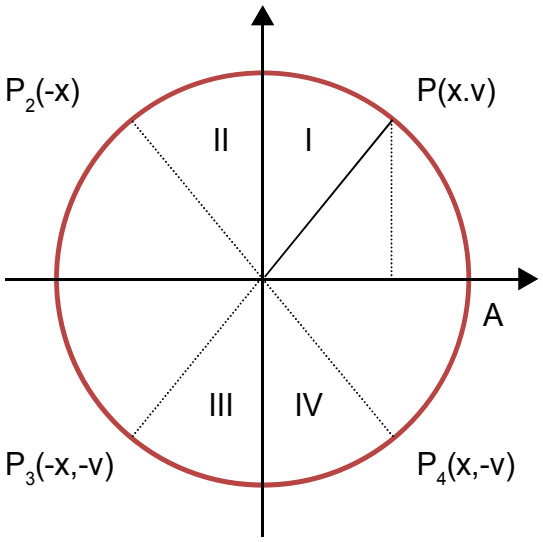
$$\sec\phi = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\csc\phi = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Latihan 1

1. Segitiga ABC siku-siku di C. Apabila sin A = 0.5, tentukan:
   a. cos A dan tan A
   b. sec A dan cot A
2. Dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, tentukan nilai trigonometrinya:
   a. sin 20^0
   b. tan 0.1
   c. cos 70^0
   d. d. csc 88^0
   e. e. cot 0.33
   f. f. tan 78^0
3. Seseorang melihat puncak pohon dengan sudut α. Apabila cos α = 0.88 dan jarak orang tersebut ke pohon adalah 15 meter, maka:
   a. Gambarkan sketsa kedudukan pohon dan orang tersebut.
   b. Tentukan tinggi pohon tersebut.
4. Gambarlah segitiga PQR yang siku-siku di P. Apabila sisi-sisi segitiga adalah p, q dan r, tuliskan rumus Pythagorasnya. Tentukan:
   a. sin P dan tan P
   b. sec P dan cot P
5. Sisi-sisi sebuah segitiga adalah r, a, dan b. Apabila $a^2 = b^2 + r^2$, apakah segitiga tersebut siku-siku? Jelaskan. Apabila salah sudut segitiga tersebut adalah α dan sin $\alpha = \frac{r}{a}$, maka tentukan:
   a. cos α dan tan α
   b. sec α dan cot α
6. Sisi-sisi sebuah segitiga ABC adalah a, b, dan c.
   a. Gambarkan se gitiga tersebut.
   b. Tuliskan rumus untuk mencari salah satu tinggi dari segitiga tersebut
   c. Tentukan nilai sin A dan tan A

Kita telah menentukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut lancip pada segitiga siku-siku. Konsep ini dapat diperluas untuk berbagai besar sudut. Perhatikan gambar sistem koordinat yang terbagi menjadi kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV berikut.



Sebuah titik bergerak mengelilingi lingkaran berjari-jari r mulai dari titik A dan sampai di titik P(x, y) pada kuadran I. Dari sini diperoleh bahwa:

$$\sin \phi = \frac{y}{r} ; \cos \phi = \frac{x}{r} ; \tan \phi = \frac{y}{x}$$

Nilai trigonometri di kuadran I adalah positif

Apabila titik tersebut bergerak ke kuadran II sampai di $P_2(-x, y)$, maka sudut yang dibentuk adalah $\pi - \phi$. Nilai trigonometrinya adalah:

$$\sin (\pi - \phi) = \frac{y}{r} = \sin \phi$$

$$\cos (\pi - \phi) = \frac{-x}{r} = \frac{x}{r} - \cos \phi$$

$$\tan (\pi - \phi) = \frac{y}{-x} = \frac{y}{x} = -\tan \phi.$$

Kesimpulan:

$\sin (\pi - \phi) = \sin \phi$

$\cos (\pi - \phi) = -\cos \phi$

$\tan (\pi - \phi) = -\tan \phi$

Nilai sinus di kuadran II adalah positif

Di kuadran III, titik tersebut sampai di $P_3(-x, -y)$. Nilai trigonometrinya adalah:

$$\sin (\pi + \phi) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} - \sin \phi$$

$$\cos (\pi + \phi) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} - \cos \phi$$

$$\tan (\pi + \phi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \phi$$

Kesimpulan:

$\sin (\pi + \phi) = -\sin \phi$

$\cos (\pi + \phi) = -\cos \phi$

Nilai tangen di kuadran III adalah positif

Di kuadran IV, titik tersebut sampai di $P_4(x, -y)$ dengan sudut $2\pi - \phi$ atau $-\phi$ (arah negatif, searah jarum jam). Nilai trigonometrinya adalah:

$\sin(2\pi - \phi) = \sin -\phi = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \phi$

$\cos(2\pi - \phi) = \cos -\phi = \frac{x}{r} = \cos \phi$

$\tan(2\pi - \phi) = \tan -\phi = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \phi$

Kesimpulan:

$\sin(-\phi) = -\sin \phi$

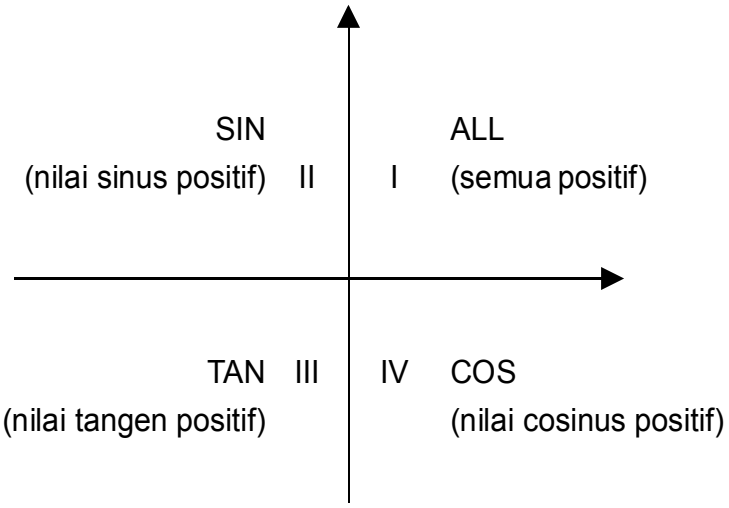
$\cos(-\phi) = \cos \phi$

Nilai cosinus di kuadran IV adalah positif. Apabila titik tersebut bergerak sampai titik P lagi, maka sudut yang ditempuh adalah $2\pi + \phi$. Akibatnya,

$\sin(2\pi + \phi) = \sin \phi$

$\cos(2\pi + \phi) = \cos \phi$

$\tan(2\pi + \phi) = \tan \phi$



Bagaimana batas-batas nilai trigonmetri? Sekarang perhatikan lingkaran berjari-jari r dengan pusat O berikut. Titik P(x, y) terletak pada lingkaran tersebut.

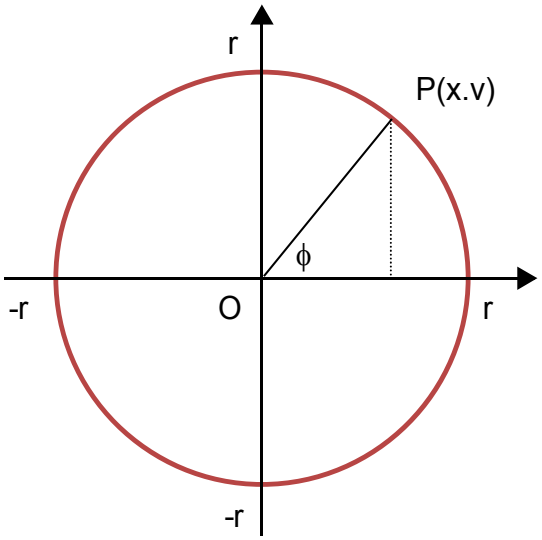
Dari gambar tampak bahwa nilai x dan y memenuhi pertidaksamaan:

$-r \le x \le r$ dan $-r \le y \le r$

Dengan membagi dengan r (r adalah positif), diperoleh

$-1 \le \frac{x}{r} \le 1$ dan $-1 \le \frac{y}{r} \le 1$, atau

$-1 \le \cos \phi \le 1$ dan $-1 \le \sin \phi \le 1$, atau



Dengan menggunakan dalil Pythagoras, kita juga memperoleh persamaan lingkaran berikut.

$x^2 + y^2 = r^2$

Dengan membagi dengan r^2, diperoleh

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1, \text{ atau}$$

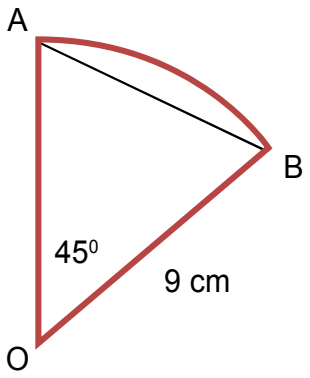
$$(\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1, \text{ atau } \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Latihan 2

1. Dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, tentukan nilai trigonometrinya:
   a. $\sin 120^0$
   b. $\tan 7$
   c. $\cos 170^0$
   d. $\csc 288^0$
   e. $\cot 4.33$
   f. $\tan 200^0$
2. Tentukan nilai trigonometri berikut.
   a. $\sin -30^0$
   b. $\tan -5$
   c. $\cos -220^0$
   d. $\csc -45^0$
   e. $\cot -4.12$
   f. $\tan -200^0$
3. Apakah $\sin 30^0 = \cos 60^0$? Jelaskan. Tunjukkan bahwa $\sin t = \cos (\pi/2 - t)$.
4. Apabila $\sin a = 0.456$, tentukan $\cos a$.
5. Segitiga ABC siku-siku di C. Nilai $\sin A = t$, tentukanlah nilai trigonometri berikut dinyatakan dalam t.
   a. $\cos A$
   b. $\tan A$
   c. $\sec B$
   d. $\sin B$
6. Titik sudut segitiga OPA adalah O(0, 0), P(-5, 12) dan A(5, 0). Besar sudut AOP adalah ϕ.
   a. Sudut ϕ tumpul atau lancip?
   b. Tentukan $\sin \phi$, $\cos \phi$, dan $\tan \phi$

Latihan 3

1. Tentukan dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator.
   a. $\sin 30^0$
   b. $\cos 60^0$
   c. $\tan 45^0$
   d. $\sin 45^0$
   e. $\sin 15^0$
   f. $\cos 30^0$
   g. $\tan 60^0$
   h. $\sin 45^0$
2. Apabila $\tan A = \frac{3}{4}$ dan sudut A di kuadran III, tentukan: sin A dan cos A
3. Nyatakan apakah setiap nilainya negatif atau positif
   a. $\cos 340^0$
   b. $\tan 2\pi/3$
4. Apabila $\cos C = 15/17$ dan sudut C di kuadran IV, maka tentukan:
   a. $\sin^2 C + \cos^2 C$
   b. $\csc^2 C - \cot^2 C$
5. Segitiga ABC siku-siku di B dan sudut BAC = 30^0. Apabila AC = 20 cm, tentukan tentukan panjang AB dan BC.
6. Seorang anak memandang sebuah pohon dengan sudut 60^0. Apabila jarak anak tersebut 60 meter dari pohon, tentukan tinggi pohon tersebut.
7. Perhatikan sektor lingkaran berikut.

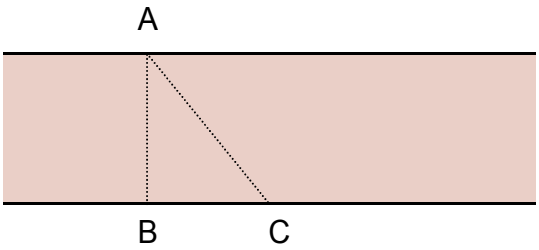


Tentukan panjang tali busur AB

8. Tentukan besar sudut α sehingga $\sin \alpha = \cos \alpha$. Ada berapa jawab yang Anda dapat? Jelaskan.

Latihan 4

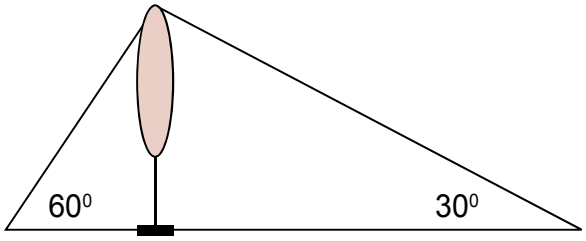
1. Ali akan mengukur tinggi pohon cemara. Dia menancapkan tongkat di atas tanah dan menunggu hingga panjang bayangan sinar matahari dari tongkat sama dengan tinggi tongkatnya.
   a. Gambarkan skema tongkat, pohon cemara dan bayangannya.
   b. Apabila sudut sudut sinar matahari dengan tanah adalah β, tentukan besar β?
   c. Tentukan sin β, cos β dan tan β
   d. Apabila bayangan pohon cemara sejauh 12 meter pada saat itu, berapa tinggi pohon cemara?
2. Sebuah tangga menyandar pada tembok dan membentuk sudut 30 derajat dengan tanah.
   a. Gambarkan skema tangga tersebut.
   b. Apabila panjang tangga 7 meter, berapa jarak tembok ke tempat tangga menumpu di tanah?
   c. Tentukan panjang tangga tersebut.
3. Sebuah segitiga ABC siku-siku di C. Apabila sudut ABC = 60^0, maka:
   a. Gambarkan segitiga tersebut.
   b. Tentukan perbandingn BC : AC : AB
   c. Berapakah sin 60^0, cos 60^0, dan tan 60^0.
4. Seorang anak menyeberang sungai selebar 15 meter dengan berenang. Kecepatan aliran sungai adalah 2 meter per detik . Kecepatan berenang anak tersebut 1.5 meter per detik. Diagram tempat anak memulai berenang (A) di tepi sungai, titik B di seberang sungai sehingga garis AB tegak lurus dengan tepi sungai dan titik C tempat anak tersebut sampai di tepi sungai adalah sebagai berikut.



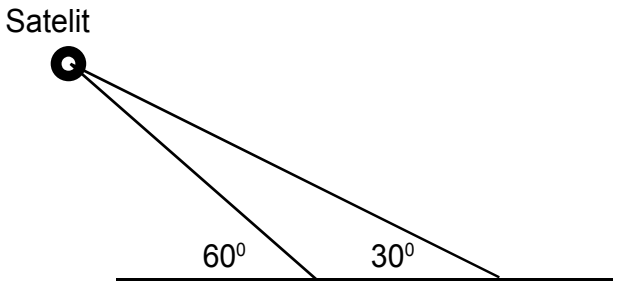
   a. Setelah berapa detik anak tersebut sampai di tepi sungai?
   b. Berapa jauh anak berenang dari A sampai C?
   c. Berapakah sudut BAC dan sudut BCA?
5. Perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku adalah 3 : 4 : 5. Apabila salah satu sisinya adalah 10 cm, tentukan sisi-sisi yang lain. Ada berapa jawab yang Anda dapat? Jelaskan. Tentukan besar sudut-sudut dalam segitiga tersebut

Latihan 5

1. Tentukan tinggi menara apabila dipandang dengan sudut elevasi 35° dan jaraknya dari pengamat 100 m.
2. Tentukan tinggi menara apabila dipandang dengan sudut elevasi 15° dan jaraknya dari pengamat 100 m.
3. Seorang berdiri di puncak gedung dan melihat mobil di jalan raya dengan sudut depresi 40°. Tentukan jarak mobil ke gedung tersebut apabila tinggi gedung 30 m.
4. Dua anak mengamati puncak pohon dari tempat yang berseberangan seperti tampak pada gambar di bawah ini. Apabila anak pertama melihat dengan sudut elevasi 60° dan anak kedua dengan sudut elevasi 40° dan jarak kedua anak tersebut 200 m. Tentukan tinggi pohon tersebut!



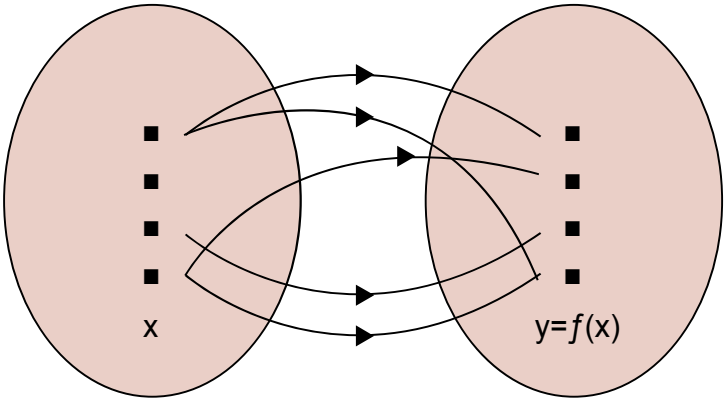
5. Sebuah satelit yang diamati dua pengamat Sudut elevasi masing-masing pengamat adalah 60° dan 30°, seperti tampak pada gambar berikut :



Apabila jarak kedua pengamat tersebut adalah 5 km. Tentukan tinggi satelit tersebut!

UNIT 3 PERSAMAAN DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi merupakan salah satu bentuk persamaan. Dalam matematika, fungsi merupakan istilah yang digunakan untuk menunjukkan hubungan, kaitan, atau relasi antara dua besaran. Sebuah *fungsi* f adalah aturan yang memadankan tiap objek x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*).



Daerah Asal Daerah Hasil

Aturan fungsi yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah berubahnya suatu besaran akan mengakibatkan berubahnya besaran lain. Misalnya:

a. Makin tinggi biaya produksi, maka makin tinggi harga jualnya
b. Makin jauh jarak dua benda, maka makin kecil gaya tarik
c. Makin tinggi kecepatan kendaraan, makin cepat waktu yang dibutuhkan untuk sampai

Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal (misalnya f, g, atau H). Maka f(x), dibaca "f dari x atau f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Misalnya, $f(x) = x^2 - 1$, maka:

$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$
$f(a) = a^2 - 1$
f(2a) = (2a)2 – 1 = 4a2 – 1

Pada bagian ini, kita akan mempelajari fungsi trigonometri sederhana, yaitu fungsi sinus, fungsi cosinus, dan fungsi tangen.

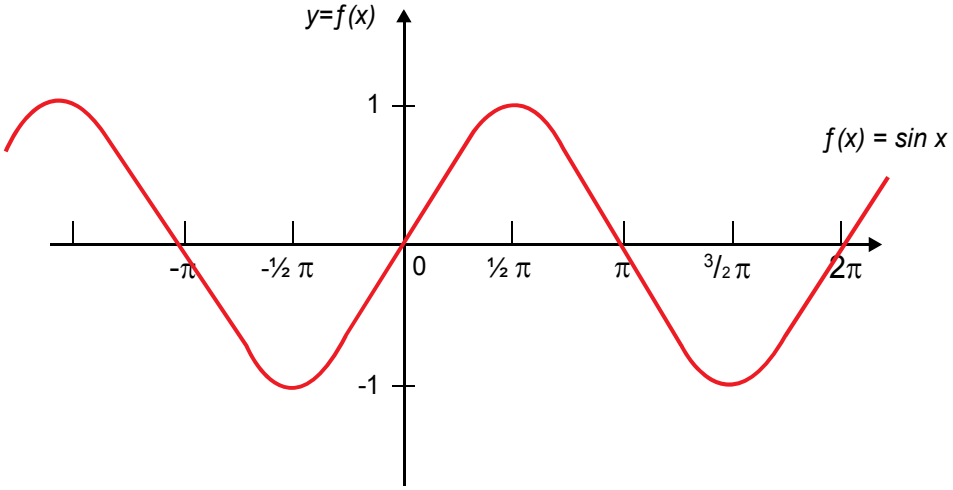
Fungsi Sinus

Sebuah fungsi sinus sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = sin x**
Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi sinus adalah grafik berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = sin x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π
y	0	-1	0	1	0

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi sinus tampak bahwa fungsi sinus memiliki periode 2π, misalkan

$\sin(-\pi) = \sin(-\pi + 2\pi) = \sin \pi = 0$,

$\sin(-\frac{1}{2}\pi) = \sin(-\frac{1}{2}\pi + 2\pi) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$,

$\sin 0 = \sin(0 + 2\pi) = \sin 2\pi = 0$,

Jadi, dapat dituliskan $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$

Penugasan 1

1. Dari grafik fungsi sinus di atas, tentukanlah:
   a. nilai maksimum fungsi sinus
   b. nilai minimum fungsi sinus

2. Berdasarkan grafik tersebut, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. sin x = -1
   b. sin x = ½

Dari kegiatan tersebut dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi sinus antara –1 sampai 1 atau dapat dituliskan sebagai **-1 ≤ sin x ≤ 1**

Apabila nilai sinus sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai sinusnya sama. Misalnya, jika sin x = 0.5, beberapa nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}, 2\pi + \frac{1}{6}, 2\frac{1}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi$, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = sin x, maka x = arc sin y (dibaca 'arcus sinus dari y'), atau
x = $\sin^{-1}$ y (dibaca 'sinus invers dari y')

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus sinus atau sinus invers dari sebuah sudut diberikan untuk $-\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$.

Contoh:

1. Tentukan nilai x, apabila sin x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila sin t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\sin^{-1}$ 0.475 = 0.49496
   Sinus sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan II, jadi nilai x yang lain adalah π - 0.49496 = 2.6466. Karena fungsi sinus berperiode 2π, maka x =0.49496 + n(2π) atau x = 2.6466 + n(2π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\sin^{-1}$ –0.866 = -59.9971^0
   Sinus sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran III dan IV. Nilai pada kuadran IV adalah -59.9971^0, jadi nilai x yang lain adalah $-(180^0 - 59.9971^0) = -120.0029^0$. Karena fungsi sinus berperiode 360^0, maka x =-59.9971^0 + n(360^0) atau x = -120.0029^0 + n(360^0), untuk n bilangan bulat.

Fungsi Cosinus

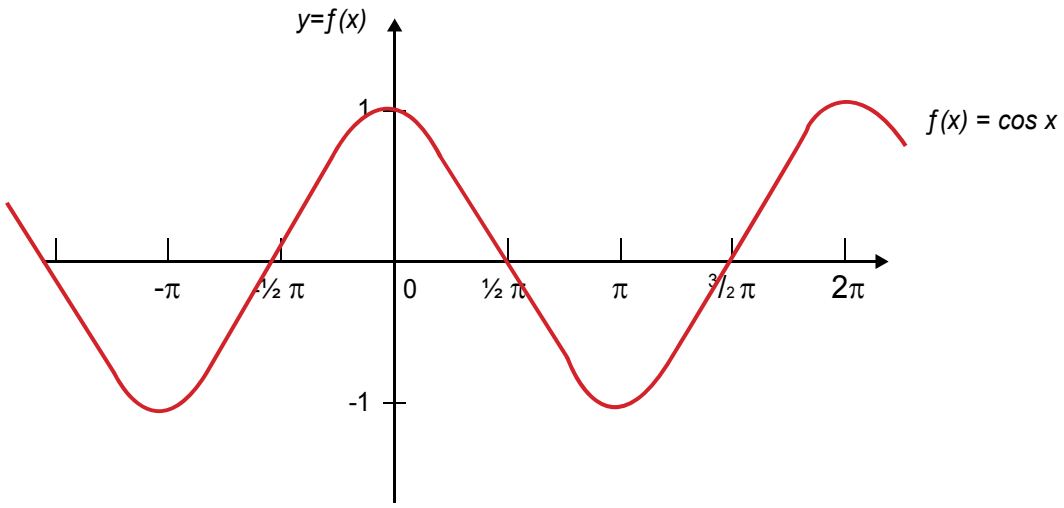
Sebuah fungsi cosinus sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = cos x**

Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi sinus adalah grafik berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = sin x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π
y	-1	0	1	0	1

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi cosinus tampak bahwa fungsi cosinus memiliki periode 2π, misalkan

$\cos(-\pi) = \cos(-\pi + 2\pi) = \cos \pi = -1,$

$\cos(-\frac{1}{2}\pi) = \cos(-\frac{1}{2}\pi + 2\pi) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0,$

$\cos 0 = \cos(0 + 2\pi) = \cos 2\pi = 1,$

Jadi, dapat dituliskan $f(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$

Penugasan 2

1. Dari grafik fungsi cosinus di atas, tentukanlah:
   a. Nilai maksimum fungsi cosinus
   b. Nilai minimum fungsi cosinus
2. Berdasarkan grafik di atas, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. $\cos x = -1$
   b. $\cos x = \frac{1}{2}$

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi cosinus antara –1 sampai 1 atau dapat dituliskan sebagai $\mathbf{-1 \leq \cos x \leq 1}$

Apabila nilai cosinus sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai cosinusnya sama. Misalnya, jika cos x = 0.5, beberapa nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}$-π, $2\pi + \frac{1}{3}\pi$, $2\pi + \frac{1}{3}\pi$, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = cos x, maka x = arc cos y (dibaca 'arcus cosinus dari y'), atau

x = cos –1 y (dibaca 'cosinus invers dari y')

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus cosinus atau cosinus invers dari sebuah sudut diberikan untuk 0 sampai π.

Contoh:

1. Tentukan nilai x, apabila cos x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila cos t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\cos^{-1}$ 0.475 = 1.07583
   Cosinus sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan IV, jadi nilai x yang lain adalah -1.07583. Karena fungsi cosinus berperiode 2π, maka x =1.07583 + n(2π) atau x = -1.07583 + n(2π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\cos^{-1}$ –0.866 = 149.9971^0 (kuadran II)
   Cosinus sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran II dan III. Nilai pada kuadran III adalah $180^0 + 30.0029^0 = 210.00291^0$, jadi nilai x yang lain adalah 210.00291^0. Karena fungsi cosinus berperiode 360^0, maka x =149.9971^0 + n(360^0) atau x = 210.00291^0.+ n(360^0), untuk n bilangan bulat.

Fungsi Tangen

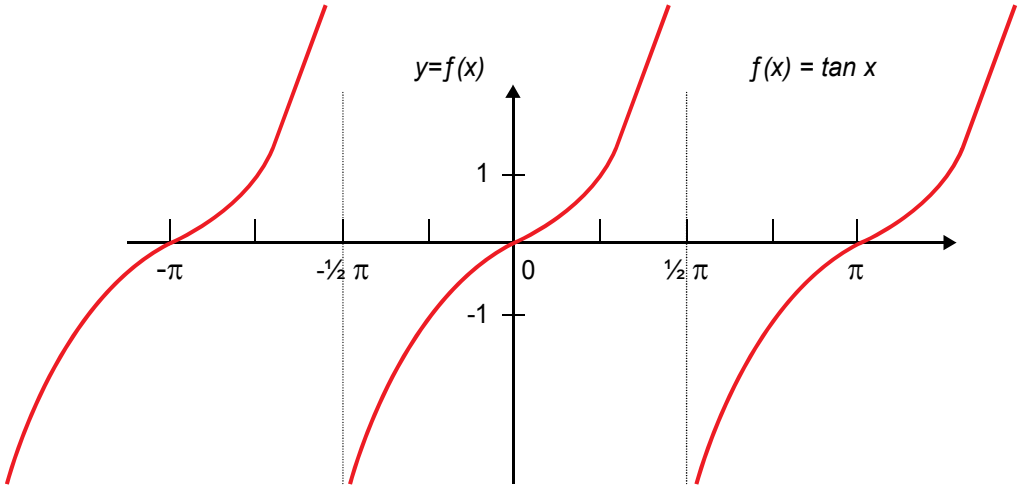
Sebuah fungsi tangen sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = tan x**

Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi tangen tidak berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = tan x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	-π	-¾π	-½π	-¼π	0	¼π	½π	¾π	π
y	0	1	-	-1	0	1	-	-1	0

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi tangen tampak bahwa fungsi tangen memiliki periode π. Pada gambar juga tampak nilai tangen membesar tanpa batas atau tak hingga (biasa dilambangkan dengan ∞) untuk x mendekati ½π dari kiri dan mengecil tanpa batas atau negatif tak hingga (dilambangkan dengan -∞) untuk x mendekati ½π dari kanan. Hal ini berulang untuk setiap periode sebesar π. Karenan periode fungsi adalah π, maka dapat dituliskan **f(x) = tan x = tan (x + π)**

Penugasan 3

1. Dari grafik fungsi tangen di atas, tentukanlah:
   a. Nilai maksimum fungsi tangen
   b. Nilai minimum fungsi tangen
2. Berdasarkan grafik di atas, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. tan x = -1
   b. tan x = ½

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi tangen antara –∞ sampai +∞. Apabila nilai tangen sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai tangennya sama. Misalnya, jika tan x = -1, beberapa nilai x yang memenuhi adalah ¼π, 1¼π, 2¼π, 3¼π, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = tan x, maka x = arc tan y (dibaca ‘arcus tangen dari y’), atau

x = tan –1 y (dibaca ‘tangen invers dari y’)

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus tangen atau tangen invers dari sebuah sudut diberikan untuk –½π sampai ½π.

Contoh:

1. Tentukan nilai x, apabila tan x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila tan t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\tan^{-1}$ 0.475 = 0.44345
   Tangen sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan III, jadi nilai x yang lain adalah π + 0.44345 = 3.585041. Karena fungsi tangen berperiode π, maka x =0.49496 + n(π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\tan^{-1}$ –0.866 = -40.89256^0 (kuadran IV)
   Tangen sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran II dan IV. Nilai pada kuadran II dicari dengan dengan menambah 180^0. Karena fungsi tangen berperiode 180^0, maka x =-40.89256^0 + n(180^0), untuk n bilangan bulat.

Kita juga dapat menentukan nilai fungsi yang melibatkan bentuk trigonometri.

Contoh:

Misalkan f(x) = x + sin (x + ¼π). Tentukan:

a. f((¾π)
b. f(-3)

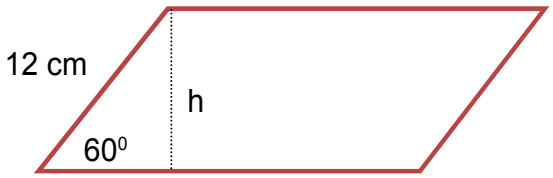
Penyelesaian:

a. f((¾π) = ¾π + sin (¾π + ¼π)
   = ¾π + sin π = ¾π + 0 = ¾π
b. Karena variabel x merupakan bilangan real, maka satuan sudut yang digunakan adalah radian. Dengan bantuan kalkulator diperoleh
   f((-3) = -3 + sin (-3 + ¼π)
   = -3 + sin (-2.214602) = -3 + (-0.03864) = -3.03864

Latihan 1

1. Untuk $f(x) = x^2 - 4$, hitunglah:
   a. f(1)
   b. f(0)
   c. f(-6)
   d. f(-2)
   e. f(k)
   f. f(2t + 1)

2. Gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut.
   a. f(x) = sin x, dengan x dalam derajat
   b. f(x) = cos x, dengan x dalam derajat
   c. f(x) = tan x, dengan x dalam derajat
3. Tentukan nilai x pada persamaan berikut.
   a. sin x = -0.787
   b. cos (x + π) = 0.655
   c. tan (-x) = 3.22
4. Sebuah fungsi didefinisikan sebagai h(t) = t + tan t
   Tentukan: (a) h(0)
   a. h(0)
   b. h(1)
   c. h(½π)
5. Gambarkan grafik fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cos x pada satu bidang koordinat. Tentukan titik potong kedua grafik tersebut.
6. Gambarkan grafik fungsi berikut.
   a. Y = 2 sin ½x, untuk $-360^0 \leq x \leq 360^0$
   b. Y = 3 cos ½x, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$
7. Apabila cos A = 3/5, maka tentukan $\frac{\cos A \tan A}{\csc A}$
8. Apabila tan A = $\frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$, maka tentukan sin A dan cos A
9. Tentukan tinggi jajar genjang pada gambar berikut.



10. Pada segitiga ABC, AC = 34 dan sudut C = 53^0 15'.
    a. Gambarkan segitiga ABC
    b. Tentukan garis tinggi AD
11. Sebuah lingkaran berjari-jari 1 satuan. Dari lingkaran tersebut dibentuk segi-n beraturan sehingga titik-titik sudutnya terletak pada sisi lingkaran.
    Tunjukkan bahwa panjang sisi segi-n beraturan adalah $2\sin\left(\frac{180^0}{n}\right)$
12. Sebuah roket diluncurkan dan membentuk sudut x terhadap tanah. Persamaan sudutnya adalah y = -½ tan x + 3/2. Gambarkan grafiknya untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

UNIT 4 IDENTITAS TRIGONOMETRI

Bentuk identitas atau kesamaan trigonometri yang paling sederhana, telah dibahas sebelumnya. Misalnya:

$\sin(\pi - \phi) = \sin\phi$ $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$ $\tan(\pi - \phi) = -\tan\phi$ ..... (1)	$\sin(\pi + \phi) = -\sin\phi$ $\cos(\pi + \phi) = -\cos\phi$ $\tan(\pi + \phi) = \tan\phi$ ..... (2)
$\sin(-\phi) = -\sin\phi$ $\cos(-\phi) = \cos\phi$ $\tan(-\phi) = -\tan\phi$ ..... (3)	$\sin(2\pi + \phi) = \sin\phi$ $\cos(2\pi + \phi) = \cos\phi$ $\tan(2\pi + \phi) = \tan\phi$ ..... (4)

Bentuk identitas trigonometri lainnya adalah

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Apabila persamaan (5) dibagi $\sin^2\phi$, diperoleh

$$\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2\phi} \rightarrow 1 + \cot^2\phi = \operatorname{cosec}^2\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Apabila persamaan (5) dibagi $\cos^2\phi$, diperoleh

$$\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} \rightarrow \tan^2\phi + 1 = \sec^2\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

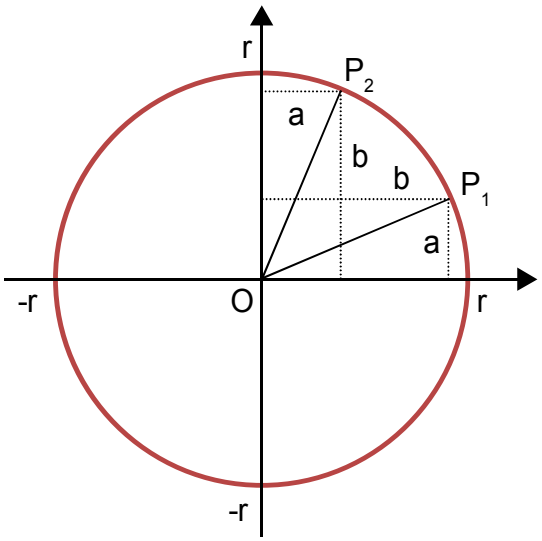
Bagaimana hubungan nilai sinus dan cosinus? Perhatikan gambar berikut.

Titik P_1 dicerminkan terhadap garis y = x sehingga diperoleh titik P_2. Sudut yang dibentuk oleh garis OP_2 terhadap sumbu x adalah $\frac{1}{2}\pi - \phi$. Perhatikan bahwa

$\sin\phi = a/r$ dan $\cos(\frac{1}{2}\pi - \phi) = a/r$

dan

$\cos\phi = b/r$ dan $\sin(\frac{1}{2}\pi - \phi) = b/r$



Dapat disimpulkan bahwa

$\cos(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \sin\phi$

$\sin(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \cos\phi$ ..... (7)

Contoh 1:

Apabila $\cos\phi = \frac{1}{4}$, maka:

a. Tunjukkan bahwa $\sin\phi = \frac{1}{4}\sqrt{15}$

b. Carilah $\tan\phi$

Penyelesaian:

a. Dari bentuk kesamaan $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, diperoleh

$\sin^2\phi + (\frac{1}{4})^2 = 1$

$\sin^2\phi = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 15/16$

$\sin\phi = \sqrt{15/16} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$

b. $\tan\phi = \dfrac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \dfrac{\frac{1}{4}\sqrt{15}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$

Latihan 1

1. Tunjukkan kesamaan berikut
   a. $\cos(4\pi + x) = \cos x$
   b. $\sin(3\pi + x) = -\sin x$
   c. $\cos(-\pi - x) = -\cos x$
   d. $\sin(-\pi - x) = \sin x$
2. Apabila $\sin\phi = t$, tunjukkan bahwa
   a. $\cos^2\phi = (1 + t)(1 - t)$
   b. $\tan^2\phi = \dfrac{1}{1 - t^2} - 1$

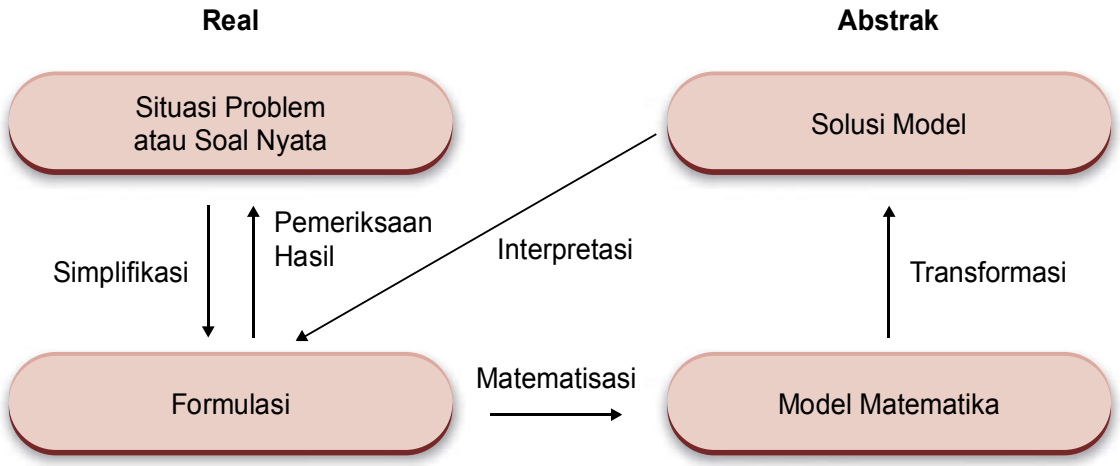
2. Apabila $\sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2}$, tunjukkan bahwa
   a. $\sin^2\phi - \sin^4\phi = \frac{1}{4}$
   b. apabila $t = \sin^2\phi$, tuliskan persamaan untuk t
   c. carilah nilai $\sin\phi$
4. Selesaikan persamaan berikut
   a. $6\cos^2\phi + \cos\phi - 1 = 0$
   b. $-5\sin^2\phi + \sin\phi + 1 = 0$
   c. $\tan\phi - \tan^2\phi + 0.5 = 1$

UNIT 5

MERANCANG MODEL MATEMATIKA UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH TRIGONOMETRI

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari, teknik ataupun keilmuan yang dapat diselesaikan dengan bantuan konsep matematika. Pentingnya fungsi matematika, terutama sebagai sarana (*tools*) untuk memecahkan masalah baik pada matematika maupun dalam bidang lainnya, sebagai cara mengkomunikasikan gagasan secara praktis, sistematis, dan efisien. Sebagai ilmu, matematika juga sangat bermanfaat untuk melatih penalaran (meningkatkan kemampuan berpikir kritis dan konsisten) melalui pemilihan materi-materi yang tercakup dalam matematika. Beberapa ketrampilan yang perlu dimiliki untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah adalah:

- **Memahami Soal:**
  Dari soal atau masalah, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Menyatakan soal ke dalam bahasa Anda sendiri
  (2) Membuat diagram dari soal tersebut
  (3) Menentukan apa fakta atau informasi yang diberikan
  (4) Menentukan apa yang ditanyakan, diminta untuk dicari, atau dibuktikan
- **Memilih Pendekatan atau Strategi Pemecahan:**
  Setelah memahami soal, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Memilih dan menggunakan pengetahuan aljabar yang diketahui
  (2) Menentukan konsep yang relevan
  (3) Menentukan atau memilih variabel yang terlibat
  (4) Merumuskan model matematika atau kalimat matematika dari masalah
- **Menyelesaikan Model:**
  Setelah memilih strategi penyelesaian, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Menentukan jenis model matematika, misalnya apakah model matematika berbentuk persamaan linear atau nonlinear, dan sebagainya
  (2) Melakukan operasi hitung atau operasi aljabar secara benar, untuk mendapatkan solusi dari masalah.
- **Menafsirkan Solusi:**
  Setelah solusi atau penyelesaian dari model matematika, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Memeriksa kelayakan atau kebenaran jawaban atau masuk akalnya jawaban, atau memberikan penyelesaian terhadap masalah semula
  (2) Solusi atau penyelesaian model matematika diterjemahkan ke dalam solusi atau penyelesaian dari masalah semula



Apabila telah mahir menyelesaikan masalah, mungkin beberapa tahap langkah di atas dapat dilewati. Barangkali cukup membaca masalah, kemudian langsung membentuk model matematika, menyelesaikan dan langsung mendapatkan penyelesaian masalahnya. Terdapat banyak masalah yang berkaitan dengan trigonometri. Kita akan memulai contoh penyelesaian masalah dengan langkah bertahap seperti berikut.

Contoh 1:

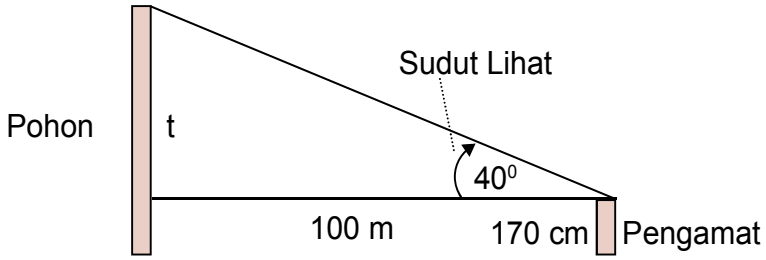
Sebuah pohon berjarak 100 meter dari seorang pengamat yang tinggi badannya 170 cm. Apabila pucuk pohon tersebut dilihat pengamat dengan sudut angkat (elevasi) sebesar 40^0, tentukan tinggi pohon tersebut.

Penyelesaian:

Apabila kita ikuti tahapan pemecahan masalah di atas, maka diperoleh sebagai berikut

- **Memahami soal**

  (1) Diagram dari soal



  (2) Dari soal diketahui: jarak mendatar pengamat ke pohon 100 m, tinggi pengamat 170 cm = 1.7 m, dan sudut lihat 40^0. Perhatikan bahwa satuan-satuan yang sejenis dinyatakan dalam satuan pengukuran yang sama agar mudah, yaitu tinggi pohon dan pengamat dinyatakan dalam satuan yang sama.

  (3) Yang dicari dari soal di atas: tinggi pohon

- **Memilih Pendekatan atau Strategi Pemecahan:**

  (1) Konsep yang relevan dari soal di atas adalah perbandingan trigonometri

  (2) Kita bisa menetapkan: variabel t untuk tinggi pohon setelah dikurangi tinggi pengamat

  (3) Merumuskan model matematika. Dari diagram di atas diperoleh

  $$\tan 40^0 = \frac{\textit{tinggi pohon dikurangi tinggi pengamat}}{\textit{jarak mendatar pengamat ke pohon}}$$

  $$\tan 40^0 = \frac{t}{100}, \text{ t dalam meter}$$

  Perhatikan bahwa apabila satuan t diubah ke satuan lain misalnya cm, maka model matematikanya berubah.

- **Menyelesaikan Model:**

  (1) Dengan melakukan operasi hitung atau operasi aljabar, diperoleh

  $$\tan 40^0 = \frac{t}{100}$$

  $$t = 100 \tan 40^0$$

  (2) Dengan menggunakan bantuan kalkulator ilmiah diperoleh

  $t = 100 \tan 40^0 = 100\ (0.8391) = 83.91$

- **Menafsirkan Solusi:**

  (1) Tinggi pohon = tinggi pengamat + nilai t

  = 1.8 m + 83.91 m = 85.71 m

  Jadi, kira-kira tinggi pohon 85.71 m. Perhatikan bahwa tinggi pohon ini adalah jawaban pendekatan karena sudut lihatnya dari mata sehingga jarak dari mata ke atas kepala diabaikan.

Contoh 2:

Persamaan gelombang suara diberikan oleh y = Asin (2π f t, di mana A amplitudo, t waktu dalam detik dan f frekuensi atau banyak periode dalam satu detik.

a. Tentukan amplitudo, frekuensi dan periode dari persamaan gelombang yang diberikan oleh y =0.02sin (500π t)

b. Carilah persamaan gelombang dengan frekuensi 4138.4 dan amplitudo 0.001

Penyelesaian:

Apabila kita sudah mahir menyelesaikan masalah. Maka kita dapat menyelesaikan secara ringkas sebagai berikut.

Masalah di atas merupakan masalah yang tidak harus dibuatkan diagramnya.

a. Dari persamaan berbentuk y =0.02sin (500π t), diperoleh A = 0.02, 2f = 500. Jadi, Amplitudonya 0.02 dan frekuensinya 250. Perhatikan bahwa frekuensi adalah banyak periode dalam satu detik. Dengan demikian, frekuensi 250 berarti terdapat 250 periode dalam satu detik atau periode dari gelombang tersebut 1/250 = 0.004

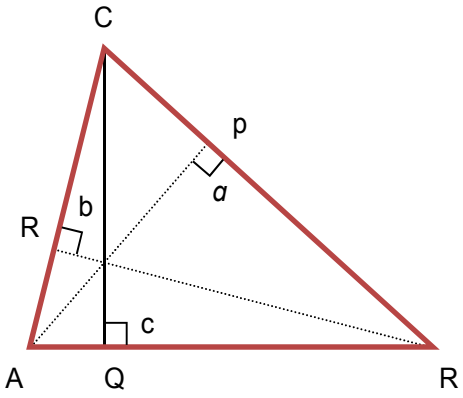
b. Dengan menggunakan rumus y = Asin (2π f t) di mana A = 0.001 dan f = 4138.4, maka diperoleh persamaan gelombangnya

$$y = A\sin(2\pi f t)$$
$$= 0.001 \sin(2\pi (4138.4) t)$$
$$= 0.001 \sin(8276.8\pi t)$$

Latihan 1

1. Riki bermain layang-layang. Dia mengulur benang sepanjang 65 meter. Apabila sudut elevasi benangnya terukur 70^0, maka:
   a. Gambarkan sketsa posisi layang-layang, benang dan Riki
   b. Tentukan tinggi layang-layang tersebut.
2. Dari suatu titik pada tanah berjarak 10 meter dari kaki tiang bendera. Apabila sudut elevasi ke puncak bendera 53^0, tentukan tinggi tiang bendera.
3. Seorang pilot pesawat melihat puncak gunung dari ketinggian 1200 m. Apabila sudut depresi (sudut lihat pilot terhadap arah mendatar) sebesar 28^0, maka:
   a. Gambarkan sketsa puncak gunung, posisi pesawat dan ketinggian dari tanah
   b. Tentukan jarak pesawat ke puncak gunung
4. Pilot pesawat terbang pada ketinggian 265 m dan melihat dua kapal laut dengan sudut depresi 35^0 20' dan 25^0 30'.
   a. Gambarkan sketsa posisi pesawat dan dua kapal laut
   b. Berapa jarak kedua kapal laut tersebut?
5. Pos hutan pegunungan terletak pada ketinggian 1.3 mil dari permukaan laut. Sebuah titik api kebakaran terlihat pada ketinggian 0.2 mil. Apabila sudut depresi titik api terhadap pos hutan adalah $18^0$15', maka:
   a. Gambarkan sketsa dari masalah di atas
   b. Berapa jarak titik api dari pos hutan?
6. Sebuah helikopter penyelamat terbang pada ketinggian 75 meter. Tepat di bawahnya ditemukan dua orang berpelampung. Setelah menyelamatkan orang tersebut, heli naik ke posisi semula dan terlihat seorang berpelampung dengan sudut depresi 26^0 25'. Gambarkan situasi masalah tersebut. Tentukan jarak antar pelampung tersebut.
7. Pada sebuah kubus dibentuk segitiga siku-siku ABC, di mana AB merupakan salah satu rusuk dari kubus, BC diagonal bidang kubus dan AC diagonal ruang kubus.
   a. Gambarkan kubus dan segitiga ABC tersebut
   b. Tentukan besar sudut ACB dan BAC

UNIT 6 ATURAN SINUS DAN COSINUS



Untuk menurunkan rumus aturan sinus perhatikan penjelasan berikut:

Segitiga ABC adalah segitiga sembarang, AP, BQ dan CR adalah garis tinggi segitiga ABC. Misal panjang sisi AB=c, BC = *a* dan AC = b. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri, diperoleh:

$$\text{Sin A} = \frac{CR}{AC} = \frac{CR}{b} \rightarrow \text{CR= b Sin A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$\text{Sin B} = \frac{CR}{BC} = \frac{CR}{a} \rightarrow \text{CR= a Sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$\text{b Sin A = a Sin B} \rightarrow \frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sekarang perhatikan Δ BAP:

$$\text{Sin B} = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{c} \rightarrow \text{AP = c. Sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Demikian juga pada Δ CAP:

$$\text{Sin C} = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{b} \rightarrow \text{AP= b. Sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh persamaan:

$$\text{c. Sin B = b. Sin C} \rightarrow \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dari persamaan (3) dan (6) dapat disimpulkan dalam segitiga ABC sembarang berlaku rumus yang dikenal dikenal dengan aturan sinus:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

Sisi a adalah sisi yang dihadapi oleh sudut A, demikian juga untuk sisi b dan c.

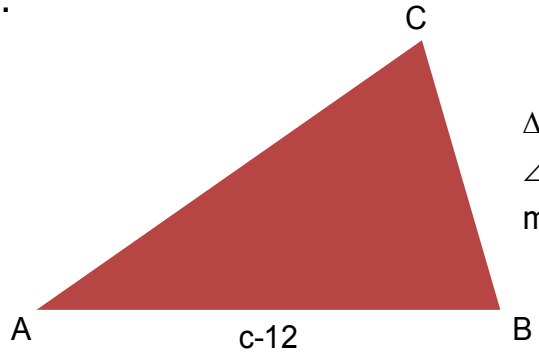
Contoh:

Diketahui sebuah segitiga sembarang ABC, dengan AB=c=12 cm, $\angle A = 50^0$, $\angle B = 80^0$, hitunglah:

a. Besar $\angle C$
b. Panjang AC dan BC

Jawab:

a.



Δ ABC sembarang dengan AB=c=12 cm.
$\angle A = 40^0$, $\angle B = 80^0$
maka $\angle C = 180^0 - 40^0 - 80^0$
$= 60^0$

b. Berdasarkan rumus: $\frac{a}{SinA} = \frac{c}{SinC}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{Sin40^0} = \frac{a}{Sin60^0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{0{,}643} = \frac{12}{0{,}866}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}866\ a = 12 \times 0{,}643$$

$$= 7.716$$

$$a = \frac{7.716}{0{,}866} = 8{,}91 \text{ cm}$$

jadi BC = a = 8,91 cm

Untuk menghitung panjang AC = b adalah:

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8{,}91}{Sin40^0} = \frac{b}{Sin80^0}$$

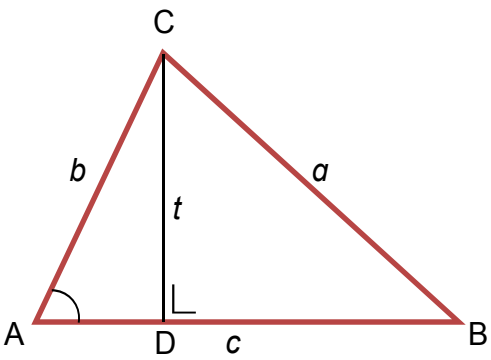
$$\Leftrightarrow \frac{8{,}91}{0{,}643} = \frac{b}{0{,}98}$$

diperoleh b = AC = $\frac{8{,}77}{0{,}643}$ = 13,65 cm

Aturan Cosinus

Perhatikan segitiga ABC dengan garis tinggi CD berikut.

Segitiga ABC segitiga sembarang. AC = b ; BC = a ; AB = c ; CD = t



Perhatikan Δ BCD, akan dicari panjang a dengan dalil pytagoras diperoleh:

$a^2 = t^2 + BD^2$ …… (7)

Dari segitiga ACD, diperoleh:

$t = b \text{ Sin } A \Leftrightarrow t^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A$ …….…..... (8)

$AD = b \text{ Cos } A$ ……..... (9)

Panjang BD = AB – AD , menurut persamaan (9) maka

BD = AB – bCosA

BD = c – bCosA ……..……. (10)

Dari persamaan (7), (8) dan (10) diperoleh hubungan berikut:

$a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + (c - b\text{CosA})^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + c^2 - 2bc \text{ CosA} + b^2 \text{ Cos}^2 A$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + b^2 \text{ Cos}^2 A + c^2 - 2bc \text{ CosA}$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \underbrace{(\text{Sin}^2 A + \text{Cos}^2 A)}_{=1} + c^2 - 2bc \text{ CosA}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ CosA}$……..… (11)

Pada rumus (11), teramati sisi pada ruas kiri adalah sisi a dan sudut pada ruas kanan adalah sudut A. dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan

b2 = a2 + c2 – 2ac CosB …… (12)

c2 = $a^2 + b^2$ – 2ab CosC…….. (13)

Dari persamaan (11), (12), dan (13), secara umum diperoleh rumus yang dikenal dengan aturan cosinus untuk suatu segitiga ABC sembarang:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ CosA}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ CosB}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ CosC}$$

Contoh:

Tentukan besar sudut A jika dari segitiga ABC diketahui a=5 cm ; b =8 cm ; c = 12

Jawab:

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ CosA$

$\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 12^2 - 2.8.12.\ CosA$

$\Leftrightarrow 25 = 64 + 144 - 192\ Cos\ A$

$\Leftrightarrow 192\ Cos\ A = 64 + 144 - 25$

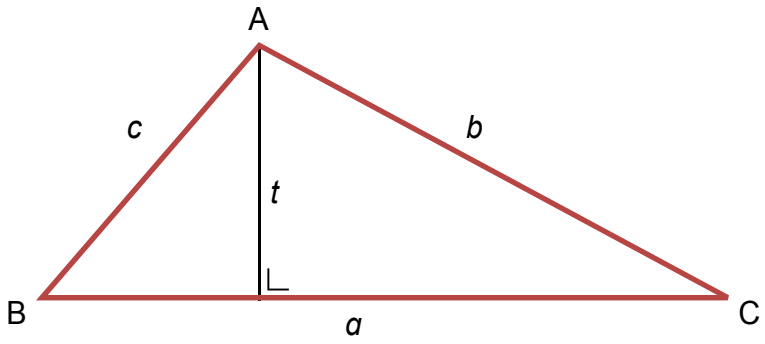
$\Leftrightarrow 192\ Cos\ A = 183$

$\Leftrightarrow Cos\ A = \frac{183}{192} = 0{,}953$

$A = 17{,}6^0$

Penggunaan Aturan Sinus

Selama ini luas segitiga dihitung dengan rumus luas alas x tinggi dibagi dua. Sekarang perhatikan segitiga ABC berikut.



Luas segitiga ABC adalah :

L = ½ x alas x tinggi

= ½ x a x t ..... (A)

Berdasarkan perbandingan trigonometri, $\frac{t}{AB} = SinB$ atau t = AB Sin B , karena AB = c , maka

$t = c\ Sin\ B$ ..... (B)

Dari persamaan (A) dan (B) , maka diperoleh rumus luas segitiga:

L = ½ ac Sin B ..... (C)

Dengan cara yang sama, dapat diturunkan rumus lain

$L = \frac{1}{2}$ ab Sin C ..... (D)

$L = \frac{1}{2}$ bc Sin A ..... (E)

Contoh:

Sebuah segitiga ABC diketahui sisi a = 12 cm , b = 8 cm dan $\angle C=35^0$ tentukan luas segitiga tersebut.

Jawab:

$\angle C=35^0$ maka sin 35^0 = 0,57 (menggunakan kalkulator)

maka luas segitiga ABC : L = ab SinC

= 12 x 8 x 0,57

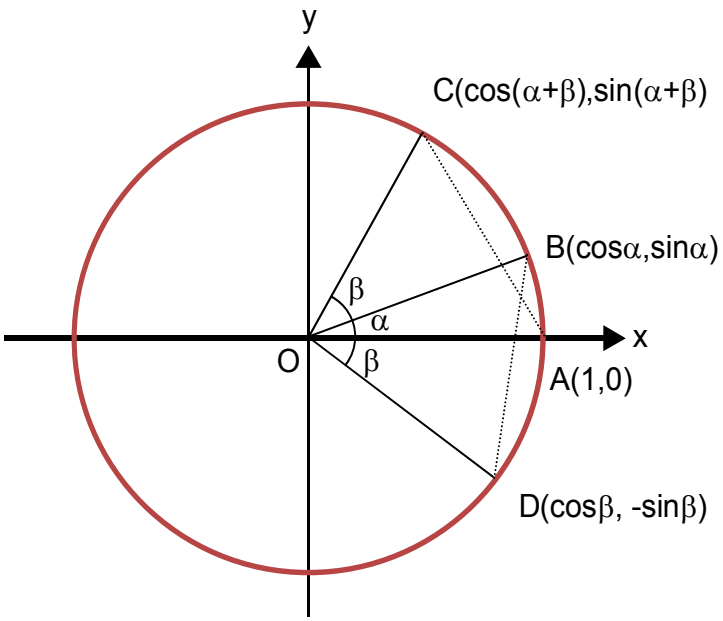
= 55,06 cm^2

Latihan 1

1. Pada segitiga PQR, diketahui $\angle P = 42^0$, $\angle Q = 70^0$, dan PR = 10 cm
   a. Hitunglah besar sudut R
   b. Hitung panjang PQ dan QR
2. Gambarkan segitiga KLM. $\angle K = 40^0$, panjang KL = 20 cm dan $\angle L= 55^0$.
   a. Hitunglah besar sudut M
   b. Hitung panjang sisi KM dan LM
3. Pada segitiga ABC diketahui $\angle A = 40^0$, AC = 15 cm, AB = 18 cm.
   a. Hitung Luas segitiga ABC
   b. Hitung tinggi segitiga ABC
   c. Hitung panjang sisi BC
4. Pada segitiga PQR diketahui PQ = 6 cm, QR = 10 cm dan $\angle P = 37^0$. hitung panjang sisi PR.

UNIT 7 COSINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Sampai saat ini, kita telah membahas beberapa rumus dasar trigonometri, pada bagian berikut kita membahas penurunan dan penerapan rumus trigonometri dari jumlah dan selisih dua sudut. Perhatikan gambar dibawah ini:



Pada gambar di atas, titik O (0,0) adalah pusat dari lingkaran yang berjari-jari 1 satuan. Koordinat titik A(1,0), besar sudut AOB = α, besar sudut BOC = β. Maka sudut AOC = $\alpha+\beta$.
Panjang OC = OB = OA = panjang jari-jari = 1. Bagaimana menentukan koordinat titik B?

$$\sin\alpha = \frac{\textit{ordinat B}}{OB} \qquad \cos\alpha = \frac{\textit{absis B}}{OB}$$

$$\text{ordinat B} = OB \times \sin\alpha = (1)\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$\text{absis B} = OB \times \cos\alpha = (1)\cos\alpha = \cos\alpha$$

Jadi, koordinat titik B adalah (absis B, ordinat B) = (cos α, sin α). Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa

- Koordinat titik C dapat dinyatakan sebagai (cos($\alpha+\beta$),sin($\alpha+\beta$)).
- Kordinat titik D dapat dinyatakan sebagai (cosβ,-sinβ)

Dari segitiga AOC dan BOD

OD = OA (jari-jari)
$\angle$ AOC = $\angle$ BOD
OC = OB (jari-jari)

maka segitiga AOC kongruen segitiga BOD
akibatnya : AC = BD ..... (i)

Jarak dua titik AC adalah:

$AC^2 = \{\cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha+\beta) - 0\}^2$

$\Leftrightarrow \quad AC^2 = \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \quad AC^2 = \underbrace{\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)}_{=1} - 2\cos(\alpha+\beta) + 1$

maka $AC^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ ..... (ii)

Jarak dua titik BD adalah :

$BD^2 = \{\cos\beta - \cos\alpha\}^2 + \{-\sin\beta - \sin\alpha\}^2$

$\Leftrightarrow$ BD2 = cos2β – 2 cosβ . cosα + cos2α + sin2β + 2 sinβ.sinα + sin2 α

$\Leftrightarrow$ BD2 = cos2β + sin2β + cos2α + sin2 α – 2 cosβ . cosα + 2 sinβ.sinα

$\Leftrightarrow$ BD2 = 2 – 2 cosβ . cosα + 2 sinβ.sinα ..... (iii)

Dari persamaan (i), (ii), dan (iii), maka diperoleh persamaan:

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\beta \,.\, \cos\alpha + 2\sin\beta.\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos(\alpha+\beta) = -2\cos\beta \,.\, \cos\alpha + 2\sin\beta.\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha \,.\, \cos\beta - 2\sin\alpha.\sin\beta$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

Sehingga diperoleh rumus cosinus dari jumlah dua sudut:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ ..... (iv)

Contoh:

Hitung cosinus jumlah sudut $a^0 + b^0$?

Jawab:

$\cos(a^0 + b^0) = \cos a^0 \,.\, \cos b^0 - \sin a^0.\sin b^0$

Sekarang jika sudut β diganti dengan $-\beta$, maka rumus (iv) menjadi bentuk berikut:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha \,.\cos(-\beta) - \sin\alpha.\sin(-\beta)$

Karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, maka:

$\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \,.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

Diperoleh rumus cosinus dari selisih dua sudut:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(v)}$$

Contoh soal:

1. Uraikan bentuk dibawah ini:
   a. $\cos(2a + 3b)$
   b. $\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$
   c. $\cos(3c - 2a)$
   d. $\cos\left(2p - \frac{q}{2}\right)$

   Jawab:

   a. $\cos(2a + 3b) = \cos2a \,.\, \cos3b - \sin2a.\sin3b$
   b. $\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) = \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{3} - \sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{3}$
   c. $\cos(3c^0 - 2a^0) = \cos3c^0 \,.\, \cos2a^0 + \sin3c^0.\sin2a^0$
   d. $\cos\left(2p - \frac{q}{2}\right) = \cos2p \,.\, \cos\frac{q}{2} - \sin2p.\sin\frac{q}{2}$

2. Dengan menggunakan rumus cosinus jumlah dan selisih dua sudut, tentukan:
   a. $\cos(75^0)$
   b. $\cos(15^0)$

   Jawab:

   a. $\cos(75^0) = \cos(30^0 + 45^0)$
   $= \cos 30^0.\cos45^0 - \sin30^0.\sin 45^0$
   $= \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
   b. $\cos(15^0) = \cos(45^0 - 30^0)$
   $= \cos 45^0.\cos30^0 + \sin45^0.\sin 30^0$
   $= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$
   $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

3. Tentukan bentuk sederhana dari berikut:
   a. $\cos5a.\cos3b - \sin 5a.\sin5b$
   b. $\cos(2a+b).\cos(-a+b) + \sin(2a+b).\sin(-a+b)$

   Jawab:

   a. $\cos5a.\cos3b - \sin 5a.\sin5b = \cos(5a+3b)$

b. $\cos(2a+b).\cos(-a+b) + \sin(2a+b).\sin(-a+b) = \cos\{(2a+b) - (-a+b)\}$

$= \cos\{2a+b+a - b\}$

$= \cos(3a)$

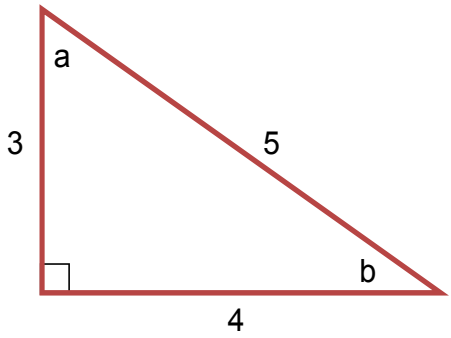
4. Jika $\cos a = \frac{3}{5}$; $\text{Cos } b = \frac{4}{5}$ tentukan nilai dari :

a. $\cos(a + b)$

b. $\cos(a - b)$

c. $\cos(b - a)$

Jawab: Dari gambar dibawah ini diperoleh:



$\cos a = \frac{3}{5}$, maka $\sin a = \frac{4}{5}$

$\cos b = \frac{4}{5}$, maka $\sin b = \frac{3}{5}$

a. $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} - \frac{12}{25}$

$= 0$ karena besar sudut $(a+b) = 90^0$ sehingga $\cos 90^0 = 0$

b. $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$

$= \frac{24}{25}$

c. $\cos(b - a) = \cos b.\cos a + \sin b.\sin a$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$

$= \frac{24}{25}$

UNIT 8 SINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Tentu kita masih ingat identitas: sin (½π – α) = cos α dan cos (½π – α) = sin α. Kita akan menggunakan sifat ini untuk menurunkan rumus sinus jumlah dua sudut sebagai berikut:

sin (½π – α) = cos α, maka sin(½π –(α+β)) = Cos(α+β) …… (vi)

cos (½π –α) = sinα, maka cos(½π – (α+β)) = sin (α+β) …… (vii)

Dari persamaan (vii) dapat diuraikan sebagai berikut:

cos(½π – (α+β)) = sin (α+β)

⇔ cos (½π – α) –β)) = sin (α+β)

Dengan menguraikan ruas kiri, diperoleh:

⇔ cos(½π – α). cos β + sin (½π – α). sinβ = sin (α+β)

⇔ sinα. cos β + cosα. sinβ = sin (α+β)

Jadi, diperoleh rumus sinus dari jumlah dua sudut:

sin (α + β) = sinα. cos β + cosα. sinβ …… (viii)

Jika sudut β diganti menjadi -β, dari persamaan (viii) diperoleh:

sin (α+β) = sinα. cos β + cosα. sinβ

⇔ sin (α–β) = sinα. cos (-β) + cosα. sin(-β)

⇔ sin (α–β) = sinα. cos β + cosα. (-sinβ)

⇔ sin (α–β) = sinα. cos β – cosα. sinβ

Sehingga diperoleh rumus sinus dari selisih dua sudut:

sin (α– β) = sinα. cos β – cosα. sinβ …… (ix)

Contoh soal:

1. Hitunglah besar sudut dari :
   a. sin 75^0
   b. sin 15^0

   Jawab:

   a. sin 75^0 = sin $(45^0 + 30^0)$
   = sin 45^0. cos 30^0 + cos45^0. sin 30^0
   = ½√2.½√3 + ½√2.½
   = ¼(√6 + √3)

   b. sin 15^0 = sin $(45^0 – 30^0)$
   = sin 45^0. cos 30^0 – cos45^0. sin 30^0
   = ½√2.½√3 - ½√2.½
   = ¼(√6 - √2)

2. Jika sin a = $\frac{3}{5}$ dan sin b = $\frac{3}{5}$ hitunglah:
   a. sin (a + b)
   b. sin (a – b)

   Jawab:
   Dari sin a $\frac{3}{5}$ =, maka diperoleh cos a = $\frac{4}{5}$

   sin b = $\frac{3}{5}$, maka diperoleh cos b = $\frac{4}{5}$

   a. sin (a+b) = sina. cos b + cosa. sinb

   $= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$

   $= \frac{24}{25}$

   b. sin (a–b) = sina. cos b – cosa. sinb

   $= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25}$

   = 0 ini berarti besar sudut a sama dengan besar sudut b

3. Tentukan uraian dari :
   a. sin (2a + 3b)
   b. sin (3a – p)
   c. sin ($\frac{a}{2} + \frac{p}{2}$)

   Jawab:
   a. sin (2a + 3b) = sin2a. cos 3b + cos2a. sin3b
   b. sin (3a – p) = sin3a. cos p – cos3a. sinp
   c. sin ($\frac{a}{2} + \frac{p}{2}$) = sin$\frac{a}{2}$ .cos$\frac{p}{2}$ + cos$\frac{a}{2}$ .sin$\frac{p}{2}$

4. Tentukan bentuk sederhana dari :
   a. sin(2a – 2b).cos(2a – 2b) + cos (2a – 2b).cos (2a – 2b)

   b. sin ($\frac{\alpha}{2} + \beta$).cos ($\frac{\alpha}{2} + \beta$) – cos ($\frac{\alpha}{2} + \beta$).sin ($\frac{\alpha}{2} + \beta$)

Jawab:

a. $\sin(2a - 2b).\cos(2a - 2b) + \cos(2a - 2b).\cos(2a - 2b)$

$= \sin\{2a - 2b + 2a - 2b\}$

$= \sin(4a - 4b)$

b. $\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta).\cos(\frac{\alpha}{2} + \beta) - \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta).\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)$

$= \sin\{(\frac{\alpha}{2} + \beta) - (\frac{\alpha}{2} + \beta)\}$

$= \sin 0$

$= 0$

atau dapat dikerjakan secara langsung hasilnya nol.

Selain rumus cosinus dan sinus dari jumlah dan selisih dua sudut, dapat pula diturunkan rumus trigonometri lainnya, sebagai berikut.

Rumus Tangen dari Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Telah diketahui bahwa tangen didefinisikan sebagai $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, maka

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta}$$

Apabila ruas kanan, bagian pembilang dan bagian penyebut dikalikan $\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}$, diperoleh:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta} \times \frac{\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

Jadi rumus jumlah dua sudut dari tangens adalah:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} \quad \text{..... (A)}$$

Demikian juga, dapat ditunjukkan

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha.\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta} \quad \text{..... (B)}$$

Contoh soal:

1. Hitunglah :

   a. $\tan 75^0$ b. $\tan 15^0$

   Jawab:

   1. a. $\tan 75^0 = \tan (30^0 + 45^0)$

$$= \frac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0.\tan 45^0}$$

$$= \frac{1/3\sqrt{3} + 1}{1 - 1/3\sqrt{3}.1} = \frac{(1/3\sqrt{3} + 1)}{(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})} \times \frac{(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})}{(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1)^2}{(1 - \frac{3}{9})} = (2 + \sqrt{3})$$

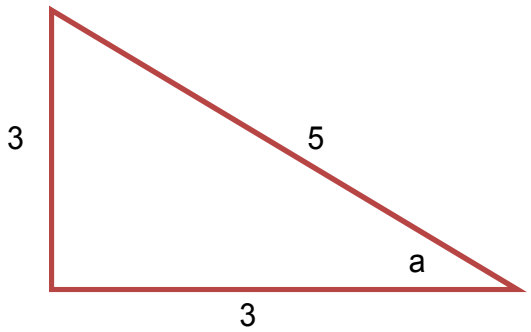
   b. $\tan 15^0 = \tan (45^0 - 30^0)$

$$= \frac{\tan 30^0 - \tan 45^0}{1 + \tan 30^0.\tan 45^0}$$

$$= \frac{(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})}{(1 + 1.\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{(1 - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3})}{(1 - \frac{1}{3})}$$

$$= (1 - \sqrt{3})$$

2. Apabila $\sin a = \frac{3}{5}$, dan $\sin b = \frac{3}{5}$ untuk mencari tan a dan tan b, perhatikan berikut ini:



$\sin a = \frac{3}{5}$, maka $\tan a = \frac{3}{4}$

Jika $\sin b = \frac{3}{5}$, maka $\cos b = \frac{4}{5}$; $\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{3}{4}$

$$\text{a. } \tan(a+b) = \frac{\tan \alpha + \tan b}{1 - \tan \alpha . \tan b}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4} . \frac{3}{4}} = \frac{24}{7}$$

$$\text{b. } \tan(a-b) = \frac{\tan \alpha - \tan b}{1 + \tan \alpha . \tan b}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} . \frac{3}{4}} = \frac{24}{7} = 0$$

Coba sekarang Anda turunkan rumus cotangen dari jumlah dan selisih sudut.

Latihan 1

1. Jabarkan bentuk berikut ini:
   a. $\cos(2a + d)$ b. $\cos(3a - 2d)$ c. $\sin(x^0 + y^0)$
   d. $\sin(\frac{\alpha - b}{2})$ e. $\tan(p^0 + 2q^0)$ f. $\tan(\frac{s}{3} - \frac{t}{2})$
2. Jika $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, hitunglah:
   a. $\cos(\alpha + \beta)$ b. $\cos(\alpha - \beta)$ c. $\sin(\alpha + \beta)$
   d. $\sin(\alpha - \beta)$ e. $\tan(\alpha + \beta)$ f. $\tan(\alpha - \beta)$
3. Sederhanakan bentuk berikut:
   a. $\cos(2a-c).\cos(a-2c) - \sin(2a-c).\cos(a-2c)$
   b. $\sin(2x-y).\cos(x-2y) - \cos(2x-y).\sin(x-2y)$
4. Hitunglah hasilnya:
   a. $\sin 105^0$
   b. $\cos 105^0$
   c. $\tan 105^0$
5. Hitung pula :
   a. $\sin 120^0$
   b. $\cos 150^0$
   c. $\tan 135^0$

6. Buktikan :
   a. $\sin (90^0 - \alpha) = \sin (90^0 + \alpha)$
   b. $\cos (90^0 - \alpha) = - \cos (90^0 + \alpha)$
7. Tunjukkan :
   a. jika sin a = cos b, maka sin (a+b) = 1
   b. jika tan a = tan b , maka tan (a – b) = 0

Rumus Trigonometri dari Sudut Ganda atau Sudut Rangkap

Kita belajar sinus dari jumlah dua sudut : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$. Sekarang jika $\alpha=\beta$, maka akan menjadi:

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha . \cos\alpha + \cos\alpha . \sin\alpha.$$
$$= 2 \sin\alpha . \cos\alpha$$

Diperoleh rumus sudut rangkap sinus:

$$\textbf{Sin } 2\alpha = \textbf{2 Sin}\alpha\textbf{. Cos}\alpha$$

Untuk cosinus dari jumlah dua sudut : $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta . \cos\alpha - \sin\beta.\sin\alpha$. Jika $\alpha=\beta$, maka rumus cosinus dari jumlah dua sudut akan menjadi:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha . \cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha.$$
$$= \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$$

Dari kesamaan trigonometri kita tahu bahwa: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ atau $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ atau $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ maka diperoleh juga:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos 2\alpha - (1 - \cos 2\alpha)$$
$$= \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - 1$$
$$= 2 \cos 2\alpha - 1 \text{ atau}$$
$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = (1 - \sin 2\alpha) - \sin 2\alpha$$
$$= 1 - 2 \sin 2\alpha$$

Sehingga rumus sudut rangkap dari cosinus adalah:

$$\textbf{Cos}2\alpha = \textbf{cos}^2\alpha \textbf{ – sin}^2\alpha$$
$$= \textbf{2 cos}^2\alpha \textbf{ – 1}$$
$$= \textbf{1 – 2 sin}^2\alpha$$

Untuk rumus sudut rangkap dari tangens dapat diturunkan dengan cara yang sama. Untuk $\alpha=\beta$, maka rumus jumlah dua sudut tan $(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$, menjadi:

$$\tan(\alpha+\alpha) = \tan(2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

$$= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Jadi rumus sudut rangkap untuk tangens adalah:

$$\textbf{tan2}\,\alpha = \frac{\textbf{2tan}\,\alpha}{\textbf{1 - tan}^2\,\alpha}$$

Contoh soal:

1. Jika sin a = $\frac{3}{5}$; hitunglah:

   a. sin 2a b. cos 2a c. tan 2a

Jawab:

a. sin a = $\frac{3}{5}$, berdasarkan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka :

cos a = $\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

tan a = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ sehingga

sin 2a = 2 sina.cosa = 2. = $\frac{3}{5} . \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

b. cos 2a = $\cos^2 a - \sin^2 a$

= $(\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

c. tan 2a = $\dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

= $\dfrac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$

2. Jika tan $\frac{a}{2} = s$, tentukan tan a:

Jawab:

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2 \times s}{1 - s^2} = \frac{2s}{1 - s^2}$$

3. Hitunglah tan $(22\frac{1}{2})^0$

Jawab:

$\tan 45^0 = \frac{2 \tan 2\frac{1}{2}^0}{1 - \tan^2 2\frac{1}{2}^0}$; kita tahu bahwa $\tan 45^0 = 1$, maka

$1 = \frac{2 \tan 2\frac{1}{2}^0}{1 - \tan^2 2\frac{1}{2}^0}$; misal $\tan (22\frac{1}{2})^0 = x$, maka $\tan^2(22\frac{1}{2})^0 = x^2$,

diperoleh persamaan:

$$1 = \frac{2x}{1 - x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 2x$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ (Persamaan Kuadrat a=1, b=2, c=-1),
maka akar-akar persamaan kuadrat:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Leftrightarrow x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1\,(-1)}}{2.1}$$

$$\Leftrightarrow x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2 + 2}}{2} \Leftrightarrow x_{12} = -1 \pm \sqrt{2}$$

diperoleh : $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ (memenuhi)
$x_2 = -1 - \sqrt{2}$ (tidak memenuhi)
sehingga diperoleh $\tan 22\frac{1}{2}^0 = -1 - \sqrt{2}$

UNIT 9 JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS

Perhatikan kembali rumus cosinus dari jumlah dan selisih dua sudut berikut

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \ldots\ldots (2)$$

Apabila persamaan (1) dan (2), dijumlahkan diperoleh:

$$\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2\cos A \cos B \quad \ldots\ldots (3)$$

Jika misalkan

$$A + B = C$$

$$A - B = D \quad \ldots\ldots (4)$$

Dengan menggunakan metode eliminasi substitusi, dari sistem persamaan (4) diperoleh

$$A = \tfrac{1}{2}(C + D) \text{ dan } B = \tfrac{1}{2}(C - D) \quad \ldots\ldots (5)$$

Dari persamaan (3) dan (5), dapat diturunkan rumus berikut::

$$\cos C + \cos D = 2\cos \tfrac{1}{2}(C + D) \cos \tfrac{1}{2}(C - D) \quad \ldots\ldots (6)$$

Dari persamaan (6), secara umum dapat diturunkan rumus jumlah cosinus dari dua sudut sebagai berikut.

$$\cos A + \cos B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \quad \ldots\ldots (7)$$

Apabila persamaan (1) dikurangi dengan persamaan (2), diperoleh:

$$\cos (A + B) - \cos (A - B) = -2\sin A \sin B \quad \ldots\ldots (8)$$

Dengan pergantian variabel berdasarkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$$\cos C - \cos D = -2\sin \tfrac{1}{2}(C + D) \sin \tfrac{1}{2}(C - D) \quad \ldots\ldots (9)$$

Dari persamaan (9), secara umum dapat diturunkan rumus selisih cosinus dari dua sudut sebagai berikut.

$$\cos A - \cos B = -2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \quad \ldots\ldots (10)$$

Contoh:

Tentukan:

a. $\cos 75^0 + \cos 15^0$
b. $\cos 75^0 - \cos 15^0$

Jawab:

a. Dengan menggunakan rumus jumlah cosinus diperoleh

$\cos A + \cos B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos \frac{1}{2}(75^0 + 15^0) \cos \frac{1}{2}(75^0 - 15^0)$

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos 45^0 \cos 60^0$

$= 2\ (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. Dengan menggunakan rumus selisih cosinus diperoleh

$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos 75^0 - \cos 15^0 = -2\sin \frac{1}{2}(75^0 + 15^0) \sin \frac{1}{2}(75^0 - 15^0)$

$= -2\sin 45^0 \sin 60^0$

$= -2(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Perhatikan sinus dari jumlah dan selisih dua sudut berikut.

$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ..... (11)

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ..... (12)

Apabila persamaan (11) dan (12), dijumlahkan diperoleh:

$\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2\sin A \cos B$ ..... (13)

Dengan pergantian variabel berdasarkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$\sin C + \sin D = 2\sin \frac{1}{2}(C + D) \cos \frac{1}{2}(C - D)$ ..... (14)

Dari persamaan (14), secara umum dapat diturunkan rumus jumlah sinus dari dua sudut sebagai berikut.

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$ ..... (17)

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa selisih sinus dari dua sudut, secara umum diberikan oleh

$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$ ..... (18)

Contoh:

Tentukan:

a. $\sin 75^0 + \sin 15^0$

b. $\sin 75^0 - \sin 15^0$

Jawab:

a. Dengan menggunakan rumus jumlah sinus diperoleh

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\sin 750 + \sin 150 = 2\sin \frac{1}{2}(750 + 150) \cos \frac{1}{2}(750 - 150)$

$= 2\sin 450 \cos 600$

$= 2\ (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. Dengan menggunakan rumus selisih sinus diperoleh

$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$$\cos 750 - \cos 150 = 2\cos \tfrac{1}{2}(750 + 150) \cos \tfrac{1}{2}(750 - 150)$$
$$= 2\cos 450 \cos 600$$
$$= 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

Latihan 1

1. Pada jajar genjang, buktikan bahwa jumlah kuadrat panjang diagonal sama dengan dua kali jumlah kuadrat panjang dua sisi yang berdekatan
2. Pada segitiga ABC, panjang AB = 3.0, AC = 7.0, dan BC = 9.0. Dari titik tengah BC, yaitu titik D ditarik garis berat ke tiitk A.
   a. Gambarkan segitiga ABC tersebut
   b. Tentukan panjang garis berat AD
3. Sebuah kapal di suatu teluk berjarak 16 mil dari lampu rumah dan 28 mil dari lampu rumah yang lain. Carilah jarak kedua lampu rumah tersebut apabila sudut yang terbentuk antara kedua lampu dari kapal adalah 120^0.
4. C mengirim sinyal ke A dan B. Dari sinyal yang dipantulkan diketahui B membentuk sudut 050^0 pada jurusan tiga angka terhadap posisi A. Jarak AC = 5.0 mil dan CB = 9.0 mil. B terletak di selatan A.
   a. Gambarkan kedudukan A, B dan C
   b. Tentukan besar jurusan tiga angka dari A dan B
5. Sederhanakan bentuk: cos A + sin A tan A
6. Buktikan bahwa:
   a. sin B cot B = cos B
   b. $\dfrac{1 + \cos C}{\cos C} = 1 + \sec C$
   c. $\dfrac{1 + \cos A}{\cos A} = \dfrac{\sin A}{1 - \cos A}$
7. Perhatikan bentuk $\dfrac{\cos A}{\sec A + \tan A}$. Nyatakan dalam sin A
8. Perhatikan bentuk $\dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$. Nyatakan dalam tan A
9. Tentukan nilai eksak dari:
   a. $\sin 15^0$

b. $\cos \frac{5\pi}{12}$

c. $\tan 105^0$

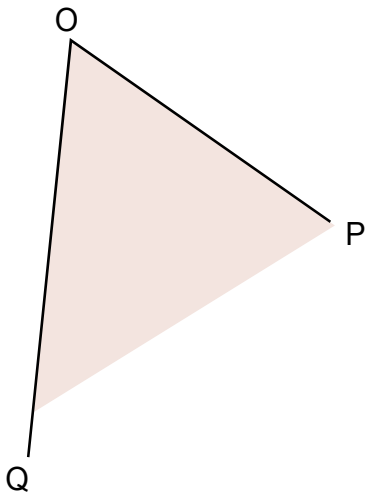
10. Apabila $\sin A = -1/3$ dan $\cos B = 1/5, 180^0 < A < 270^0$ dan $270^0 < B < 360^0$. Tetnukan $\cos (A - B)$
11. Sebuah pesawat berjarak 320 mil ke menara bandara dengan sudut depresi $34^0 20'$ dari kokpit. Pada saat yang sama sudut depresi ke pusat danau yang terletak antara pesawat dan bandara adalah $43^0 40'$.
    a. Gambarkan diagram posisi pesawat, bandara dan pusat danau
    b. Tentukan jarak pusat danau ke bandara
12. Tanjakan garis pada bidang koordinat sama dengan tangen sudut dari garis dengan sumbu - x. Jika ϕ adalah sudut yang dibentuk oleh perpotongan garis n dan p yang berturut-turut membentuk sudut ϕ_1 dan ϕ_2 terhadap sumbu – x di mana masing-masing memiliki tanjakan m_1 dan m_2, tunjukkan bahwa

$$\tan \phi = \frac{m_2 + m_1}{1 + m_2 m_1}$$

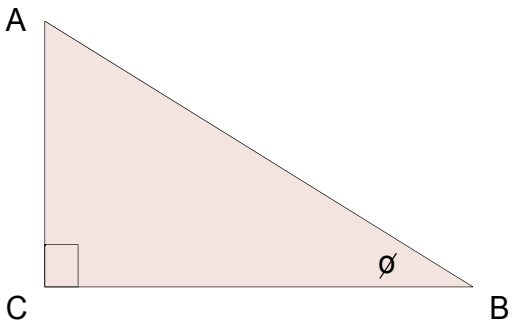
13. Dengan menggunakan trigonometri sudut ganda, tentukan nilai eksak dari:
    a. $\sin 120^0$
    b. $\tan 120^0$
14. Apabila $\sin B = 3/5$ dan B terletak di kuadran dua, maka: tentukan nilai eksak dari (a) $\sin 2B$; (b) $\cos 2B$
15. Apabila $\sin Y = -\frac{24}{25}$ dan $180^0 < Y < 270^0$, maka: tentukan nilai eksak dari (a) $\sin \frac{Y}{2}$; (b) $\cos \frac{Y}{2}$
16. Segitiga RST siku-siku di T dan sisi-sisi r, s dan t.
    a. Gambarkan segitiga RST tersebut.
    b. Tunjukkan bahwa: (1) $\sin 2R = \frac{2rs}{r^2}$; (2) $\cos 2R = \frac{s^2 - r^2}{t^2}$; (3) $\tan \frac{R}{2} = \frac{r}{t + s}$
17. Sederhanakan bentuk berikut.
    a. $\sin (A + B) + \sin (A - B)$
    b. $\cos (A + B) + \cos (A - B)$
18. hitunglah nilainya secara eksak:
    a. $\sin 45^0 + \sin 15^0$
    b. $\cos 45^0 + \cos 15^0$

Rangkuman

1. Sudut QOP, ∠QOP, ∠POQ, atau ∠O adalah besar daerah yang dibatasi oleh kaki sudut disebut dengan daerah sudut. Garis OQ dan OP disebut kaki-kaki sudut dan titik O merupakan titik sudut. Nama atau lambang titik sudut, yaitu titik O selalu ditulis ditengah. Kaki-kaki sudut tersebut membatasi dua daerah, yaitu daerah dalam yang berasir dan daerah luar yang tidak berarsir. Yang dimaksud besar sudut adalah sudut pada *daerah dalam*nya saja kecuali bila disebutkan secara lain



2. Sudut siku-siku dibentuk oleh dua garis tegak lurus sebagai kaki-kaki sudutnya. Simbol untuk menyatakan sudut siku-siku biasanya adalah "⌐" atau "□", yang diletakkan pada titik sudutnya. Sudut lancip besar sudutnya lebih kecil dari sudut siku-siku. Sudut tumpul besar sudutnya lebih besar dari sudut siku-siku.
3. Satuan standar atau baku untuk sudut yang digunakan adalah satuan derajat (*degree*). Satuan ini diperoleh dari daerah lingkaran yang dibagi dalam menjadi 360 bagian yang sama dari titik pusatnya. Besar setiap bagiannya adalah 1 derajat dan ditulis 1^0. Besar sudut *siku-siku adalah* 90^0 *dan sudut* 0^0 *membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus*
4. Satuan sudut yang lebih sering digunakan dalam matematika dan bidang ilmu lain adalah radian yang didefinisikan sebagai rasio dari busur dari sektor lingkaran dengan panjang jari-jarinya.
5. Besar sudut *siku-siku adalah* 90^0 *dan sudut* 0^0 *membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus. Besar sudut* $180^0 = \pi$ (dalam radian).
6. Perbandingan trigonometri atau perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku yang dihadapi suatu sudut adalah tertentu.



Besar sudut B adalah ϕ (dalam radian). Perbandingan sisi yang dihadapi sudut ϕ terhadap sisi miring disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan sisi dekat sudut pkn terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Jadi,

$$\sin \phi = \frac{\textit{sisi hadap}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AC}{AB} \text{ dan } \cos \phi = \frac{\textit{sisi dekat}}{\textit{sisi miring}} = \frac{BC}{AB}$$

Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot)

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{AC}{BC}; \cot \phi = \frac{1}{\tan \theta} \qquad \sec \phi = \frac{1}{\cos \theta}; \text{ dan } \csc \phi = \frac{1}{\sin \theta}$$

7. Nilai trigonometri dari sebuah sudut dapat dicari dengan menggunakan tabel trigonometri atau dengan menggunakan kalkulator ilmiah (*scientific calculator*) dengan menentukan dulu satuan sudut yang digunakan
8. Perbandingan dan identitas trigonometri berbagai sudut

$\sin (\pi - \phi) = \sin \phi$;	$\cos (\pi - \phi) = -\cos \phi$
$\sin (\pi + \phi) = -\sin \phi$;	$\cos (\pi + \phi) = -\cos \phi$
$\sin (-\phi) = -\sin \phi$;	$\cos (-\phi) = \cos \phi$
$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$	$\cos (\frac{1}{2}\pi - \phi) = \sin \phi$
$\sin (\frac{1}{2}\pi - \phi) = \cos \phi$	

9. Sebuah fungsi f adalah aturan yang memadankan tiap objek x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*). Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal (misalnya f, g, atau H). Maka f(x), dibaca “f dari x atau f pada x”, menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x.
10. Fungsi sinus memiliki periode 2π sehingga $f(x) = \sin x = \sin (x + 2\pi)$. Nilai invers fungsi sinus atau arcus sinus dari y, ditulis arc sin y atau $\sin^{-1} y$ dari sebuah sudut diberikan untuk $-\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$.
11. Fungsi cosinus memiliki periode 2π sehingga $f(x) = \cos x = \cos (x + 2\pi)$. Nilai invers fungsi

sinus atau arcus cosinus dari y, ditulis arc cos y atau cos $^{-1}$ y dari sebuah sudut diberikan untuk 0 sampai π.

12. Fungsi tangen memiliki periode π sehingga f(x) = tan x = tan (x + π). Nilai invers fungsi tangen atau arcus tangen dari y, ditulis arc tan y atau tan $^{-1}$ y dari sebuah sudut diberikan untuk $-\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$
13. Aturan sinus dan cosinus. Pada segitiga ABC dengan sudut A, B, dan C serta sisi a, b dan c yang menghadap sudut A, B, dan C, berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Aturan sinus dan cosinus dapat digunakan untuk menurunkan rumus luas segitiga atau menentukan sisi-sisi segitiga

14. Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut dapat digunakan untuk menentukan trigonometri lainnya dari jumlah dan selisih dua sudut atau menentukan sinus dan cosinus sudut rangkap.

15. Jumlah dan selisih sinus dan cosinus

$$\cos A - \cos B = -2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut dapat digunakan untuk menentukan trigonometri lainnya dari jumlah dan selisih dua sudut atau menentukan sinus dan cosinus sudut rangkap.

Kunci Jawaban

UNIT 1: Satuan Sudut

Latihan 1

-

Latihan 2

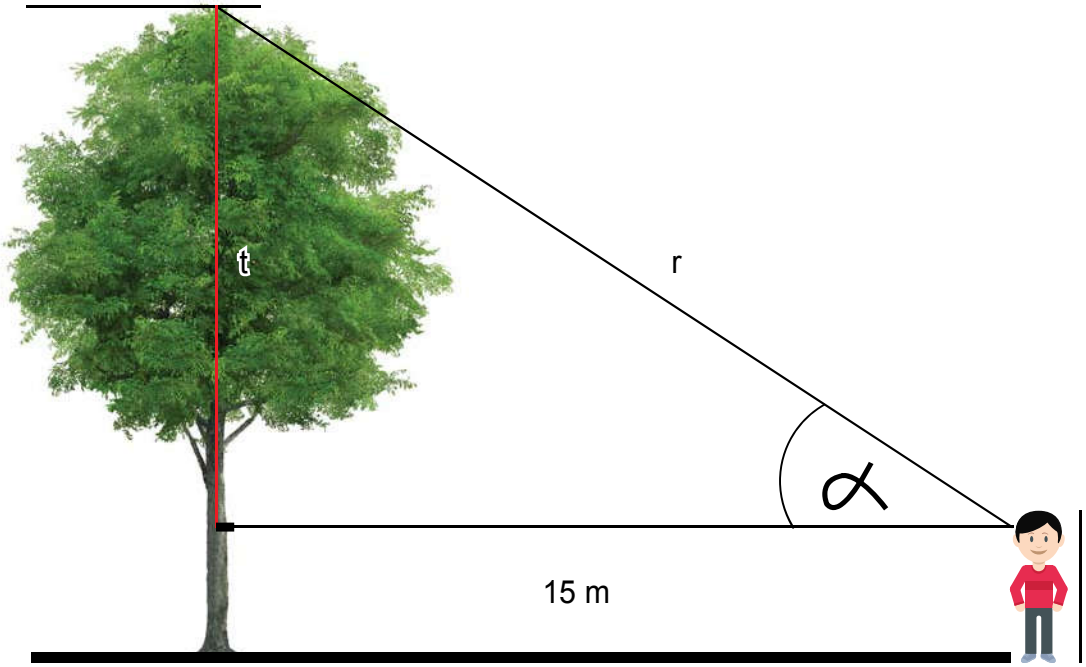
1. a. $270^0 = (\pi/180^0)(270^0) = 2/3\pi$
   b. $0^0 = (\pi/180^0)(0^0) = 0$
   c. $360^0 = (\pi/180^0)(360^0) = 1/2\pi$
   d. $-45^0 = (\pi/180^0)(-45^0) = 1/4\pi$
2. Satu putaran jarum jam = 12 jam = 12(60) = 720 menit sebesar 2π radian.
   a. Sudut putaran 15 menit $= 15/720(2\pi) = 1/24\ \pi$
   b. Sudut putaran 30 menit $= 30/720(2\pi) = 1/12\ \pi$
   c. Sudut putaran 45 menit $= 45/720(2\pi) = 1/8\ \pi$
   d. Sudut putaran 60 menit $= 60/720(2\pi) = 1/6\ \pi$
   e. Sudut putaran 1 menit $= 1/720(2\pi) = 1/360\ \pi$
   f. Sudut putaran 90 menit $= 90/720(2\pi) = 1/4\ \pi$
   g. Sudut putaran 30 detik $= (30/60)/720(2\pi) = 1/720\ \pi$
   h. Sudut putaran 1 jam $= 60/720(2\pi) = 1/6\ \pi$
3. a. Pukul sudut jarum panjang dan pendek siku-siku $= (\pi/180^0)(90^0) = ½\ \pi$
   b. Pukul sudut jarum panjang dan pendek lurus $= (\pi/180^0)(180^0) = \pi$
   c. Pukul sudut jarum panjang dan pendek siku-siku $= (\pi/180^0)(90^0) = ½\ \pi$
   d. Pukul sudut jarum panjang dan pendek berimpit $= (\pi/180^0)(0^0) = 0$
   e. Pukul sudut jarum panjang dan pendek $90^0 + 15^0 = (\pi/180^0)(105^0) = 7/12\ \pi$

UNIT 2: Perbandingan Trigonometri

Latihan 1

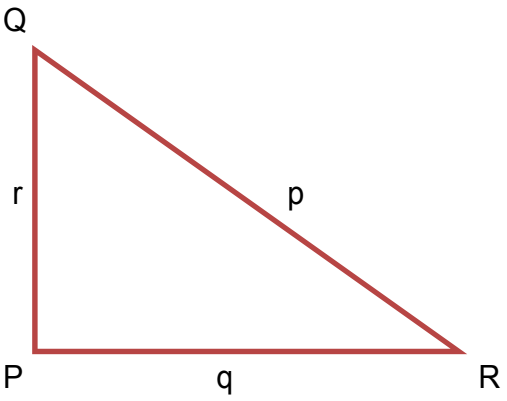
1. Dari sin A = 0.5 = ½, diperoleh sisi dekat pada segitiga ABC adalah $\sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$.
   a. cos A $= 1/2\ \sqrt{3}$ dan tan A = sin A/cos A $= (1/2)/(1/2\ \sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$
   b. sec A = 1/cos A $= 1/(1/2\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ dan cot A = 1/tan A $= 1/(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}$
2. a. $\sin 20^0 = 0.342$
   b. tan 0.1= 0.1003
   c. $\cos 70^0 = 0.342$
   d. $\csc 88^0 = 1/\sin 88^0 = 0.1.0006$
   e. cot 0.33 = 2.91949
   f. $\tan 78^0 = 4.7046$

3. a. Sketsa kedudukan pohon dan pengamat



b. cos α = jarak mendatar/r = 15/r = 0.88 ➔ r = 15/0.88 = 17.04545
tinggi pohon t = $\sqrt{(r^2 - 15^2)}$ = $\sqrt{(17.04545^2 - 15^2)}$ =8.0961 meter

4. Segitiga PQR siku=siku di P

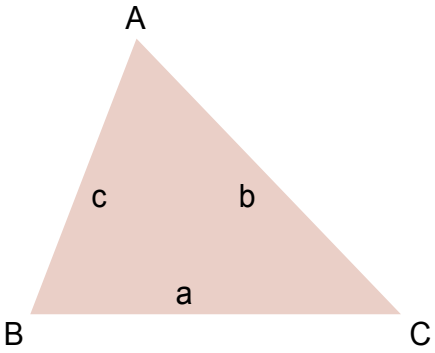


$p^2 = q^2 + r^2$

a. sin P = sin 90^0 = 1 dan tan P = tidak didefinisikan
b. sec P = 1/cos P = tidak didefinisikan dan cot P = 0

5. Sisi=sisi segitiga memenuhi kesamaan teorema Pythagoras sehingga segitiga tersebut siku=siku.
a. cos α = b/a dan tan α = sin α /cos α = $(\frac{r}{a})$/(b/a) = r/b
b. sec α = 1/cos α = a/b dan cot α = b/r

6. a. Sketsa segitiga ABC.



b. Rumus menentukan tinggi segitiga ➔ sin A = t_1/b
➔ t_1 = b sin A dan cos A = x/b
Dari sudut B, sin B = t_1/a dan cos B = (c – x)/a
➔ cos A = (c- a cos B)/b

c. Jadi sin A = a/b sin B dan tan A = (a/b sin B)/[(c – a cos B)/b]
tan A = a sin B/(c – a cos B)

Latihan 2

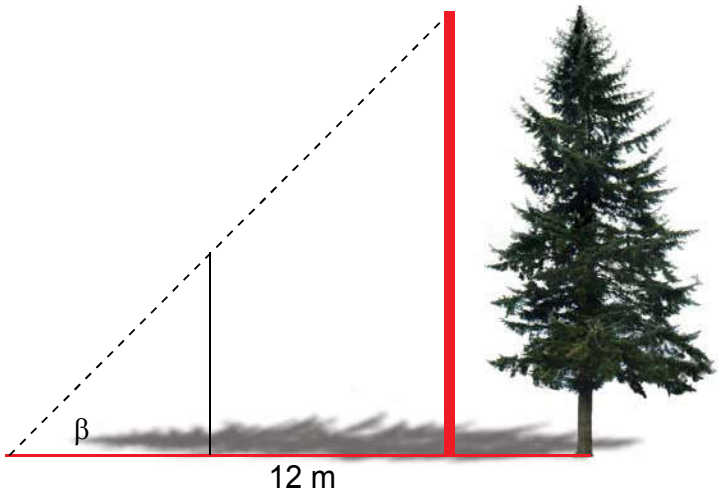
1. a. sin 120^0 = 0.86602
   b. tan 7 = 0.87144
   c. cos 170^0 = 0.98481
   d. csc 288^0 = -1.05146
   e. cot 4.33 = 0.402185
   f. tan 200^0 = 0.36397
2. a. sin -30^0 = -0.5
   a. tan -5 = 3.38051
   b. cos -220^0 = -0.76604
   c. csc -45^0 = -1.41421
   d. cot -4.12 = -0.67302
   e. tan -200^0 = -0.36397
3. Ya.
4. cos a = $\sqrt{(1^2 - 0.456^2)}$ = 0.88998
5. a. cos A = $\sqrt{(1 - t^2)}$
   b. tan A = sin A/cos A = $t/\sqrt{(1 - t^2)}$
   c. sec B = 1/cos B = 1/t
   d. sin B = $\sqrt{(1 - t^2)}$
6. a. Sudut ϕ tumpul
   b. sin ϕ = $12/\sqrt{(12^2 + 5^2)}$ = 12/13, cos ϕ = $-5/\sqrt{(12^2 + 5^2)}$ = -5/13, tan ϕ = -12/5

Latihan 3

1. a. $\sin 30^0 = 0.5$
   b. $\cos 60^0 = 0.5$
   c. $\tan 45^0 = 1$
   d. $\sin 45^0 = 0.70711$
   e. $\sin 15^0 = 0.258819$
   f. $\cos 30^0 = 0.866025$
   g. $\tan 60^0 = 1.73205$
   h. $\sin 45^0 = 0.70711$
2. $\sin A = -3/5$ dan $\cos A = -4/5$
3. a. positif
   b. negatif
4. a. $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$
   b. $\csc^2 C - \cot^2 C = 1$
5. $\sin 30^0 = BC/20 = ½ \rightarrow BC = 10$ cm dan $AB = \sqrt{(20^2 – 10^2)} = 10\sqrt{3}$ cm
6. $\cos 60^0$ =Jarak pohon/jarak pandang = 60/jarak pandang = ½ ➔ jarak pandang = 2(60) = 120 m. Tinggi pohon = $\sqrt{(120^2 – 60^2)} = 60\sqrt{3}$ m
7. Sudut OBA = $(180^0 - 45^0)/2 = 67.5^0$. Panjang garis tinggi yang dihadapi sudut O adalah $9/\sqrt{2}$ cm. Tali busur AB = (panjang garis tinggi dihadapi susut O)/sin B = $(9/\sqrt{2})/\sin 67.5^0 = 6.8883$ cm
8. $\alpha = 45^0$, atau $\alpha = 180^0 + 45^0 = 225^0$, dan seterusnya.

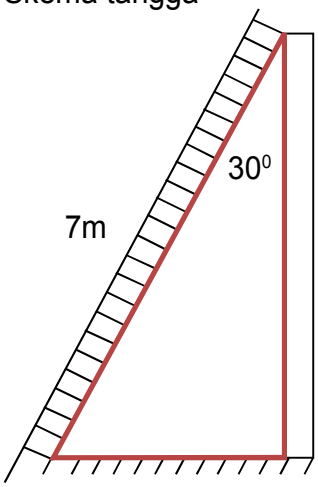
Latihan 4

1. a. skema tongkat, pohon cemara dan bayangan



   b. Tinggi benda sama dengan panjang bayangannya, maka sudut $\beta = 45^0$
   c. $\sin \beta = 1/\sqrt{2}$, $\cos \beta = 1/\sqrt{2}$ dan $\tan \beta = \sin \beta/\cos \beta = 1$
   d. Bayangan cemara = tinggi cemara = 12 m

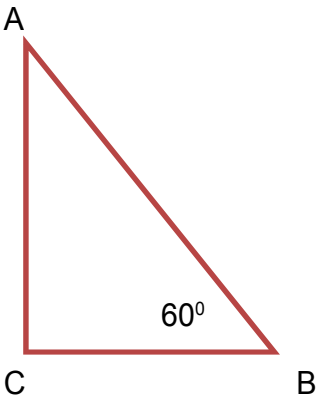
2. a. Skema tangga



b. sin 30^0 = (jarak kaki tangga ke tembok)/panjang tangga
jarak kaki tangga ke tembok = panjang tangga x sin 30^0 = 7(1/2) = 7/2 m

c. -

3. a. Skema segitiga ABC



b. AC = AB sin 60^0, BC = AB cos 60^0. Perbandingan BC : AC : AB = AB cos 60^0 : AB sin 60^0 : AB = cos 60^0 : sin 60^0: 1

c. sin 60^0 = 0.86602; cos 60^0 = ½ ; tan 60^0 = 1.73205

4. a. Kecepatan menyeberang merupakan resultan (hasil) kecepatan aliran sungai dan kecepatan tegak lurus anak = $\sqrt{(2^2 + 1.5^2)}$ = 2.5 m/det. Lebar sungai 15 m, maka waktu yang diperlukan menyeberang 15/1.5 = 10 detik

b. Anak berenang sejauh (2.5)(10) = 25 m samapi di C

c. cos BAC = AB/AC = 15/25 ➔ sudut BAC = 53.1301°. Sudut BCA = 180° - 90° – 53.1301° = 36.8699°

5. Perbandingan sisi-sisi segitiga 3 : 4 : 5. Salah satu sisi 10 cm, maka sisi lain adalah 8 cm dan 6 cm, atau 7.5 cm dan 12.5 cm, atau 13 1/3 cm dan 16 2/3 cm. Sudut-sudut segitiga 36.8699°, 53.1301° dan 90°

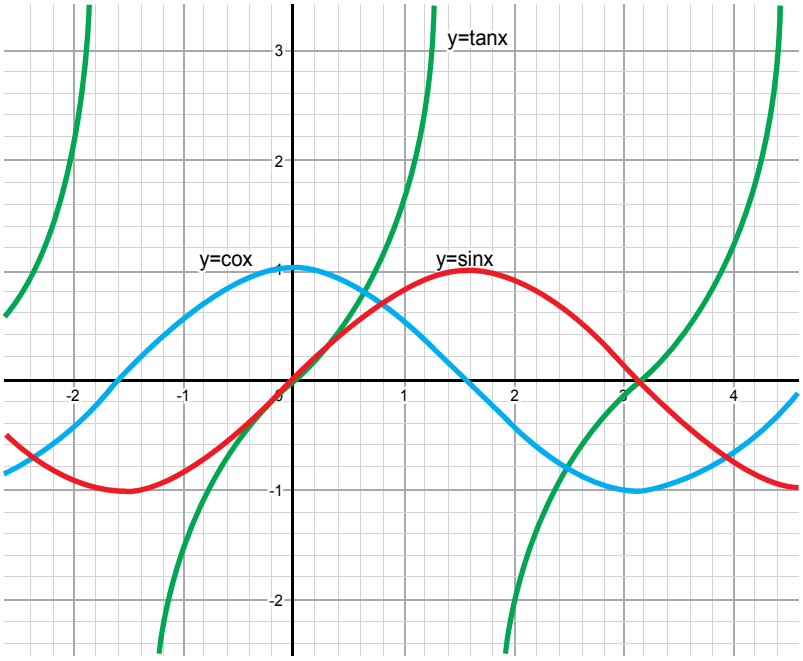
Latihan 5

1. Tinggi menara = (jarak ke pengamat) tan 35° = 100(0.70021) = 70.021 m
2. Tinggi menara = (jarak ke pengamat) tan 15° = 100(0.26795) = 26.795 m
3. Jarak mobil ke gedung = (tinggi gedung)/tan 40° = 30/0.8391 = 35.7526 m
4. Misalkan jarak anak pertama ke pohon x dan tinggi pohon t, maka diperoleh persamaan t = x tan 60° dan t = (200 – x) tan 30°. Jadi
   x tan 60° = (200 – x) tan 30°➔ x = 200 tan 30°/(tan 60° - tan 30°) = 100
   Jadi, tinggi pohon = x tan 60° = 100(1.73205) = 173.205 m
5. Misalkan tinggi satelit t, jarak mendatar ke pengamat pertama x, maka
   t = x tan 60° dan t = (x +5)tan 30°. Dari kedua persamaan diperoleh
   x = 5tan 30°/(tan 60° - tan 30°) = 2.5 km
   Tinggi satelit t = x tan 60° = 2.5(1.73205) = 4.33 km

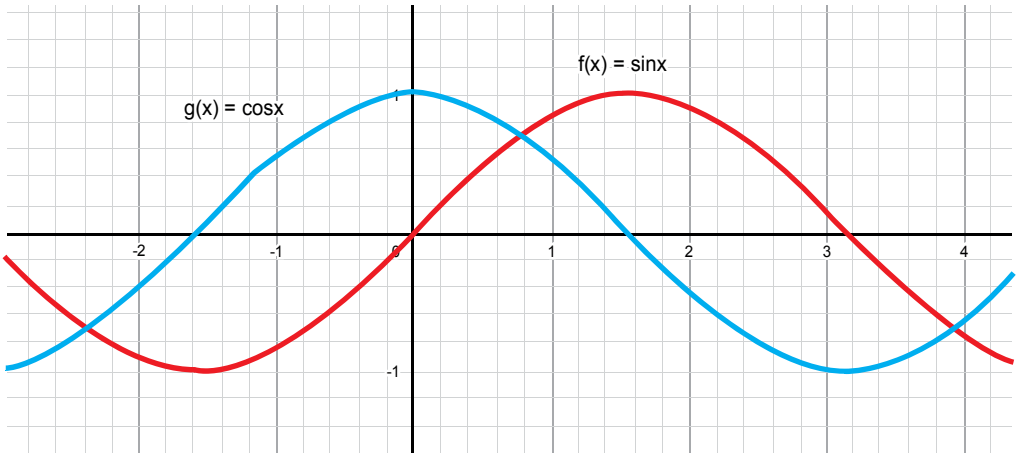
UNIT 3: Persamaan dan Fungsi Trigonometri

Latihan 1

1. a. $f(1) = (1)^2 – 4 = -3$
   b. $f(0) = (0)^2 – 4 = -4$
   c. $f(-6) = (-6)^2 – 4 = 32$
   d. $f(-2) = (-2)^2 – 4 = 0$
   e. e. $f(k) = k^2 – 4$
   f. $f(2t + 1) = (2t + 1)^2 – 4$
2. Grafik fungsi trigonometri

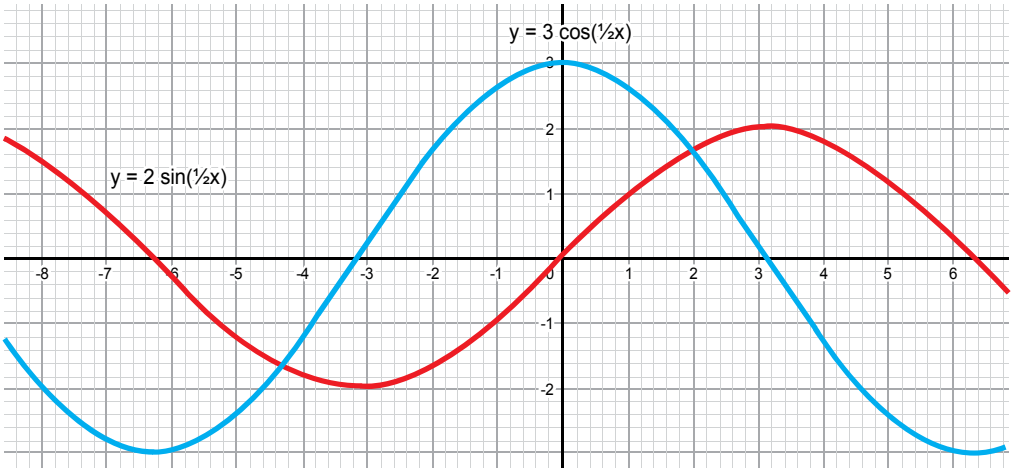


3. a. $x = \sin^{-1}(-0.787) = 0.905931$
   a. $x + \pi = \cos^{-1}(0.655) = 0.85661 \rightarrow x = 0.85661 - \pi$
   b. $-x = \tan^{-1}(3.22) = 1.26968 \rightarrow x = -1.26968$
4. a. $h(0) = 0 + \tan 0 = 0$
   b. $h(1) = 1 + \tan 1 = 2.55741$
   c. $h(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi + \tan \frac{1}{2}\pi$ = tidak didefinisikan
5. Grafik fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cos x



Titik potong kedua grafik terjadi jika sin x = cos x atau tan x = 1, yaitu titik x = ¼ π dengan periode π

6. Grafik fungsi kedua fungsi

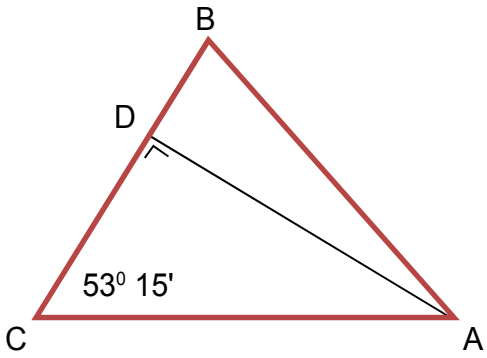


7. Jika cos A = 3/5, maka sisi depan = $\sqrt{(5^2 - 3^2)} = 4$ sehingga sin A = 4/5 dan

$$\frac{\cos A \tan A}{\csc A} = (3/5)(4/3)/[1/(4/5)]$$

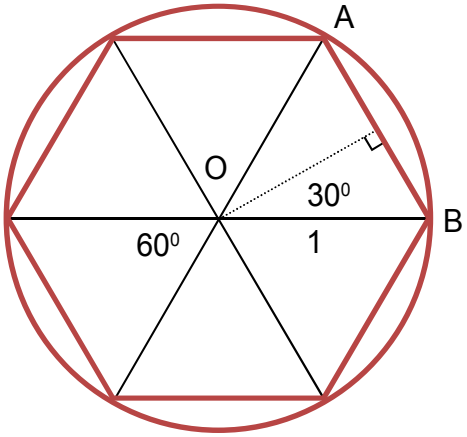
$$= (12/15)/(5/4) = (4/5)(4/5) = 16/25$$

8. Jika $\tan A = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$, maka sisi miring = $\sqrt{(1 - p^2 + p^2)} = 1$ sehingga $\sin A = \sqrt{(1 - p^2)}$ dan $\cos A = p$
9. Tinggi jajar genjang = $h = 12 \cos 60^o = 12(1/2) = 6$ cm
   a. Gambar segitiga ABC



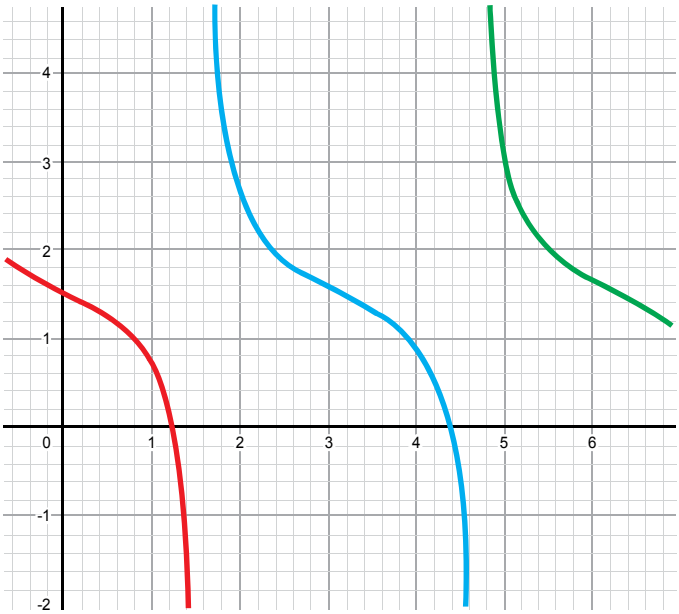
   b. $\sin C = AD/AC \rightarrow AD = AC \sin C$
   $= 34 \sin 53^0\ 15' = (34)(0.80125) = 27.24263$

11. Segi enam beraturan pada sebuah lingkaran berjari-jari 1 satuan



Pada segi-6 beraturan di atas, sudut sektor $360^o/6 = 60^o$. Panjang AB $= 2 \sin 30^0$. Pada segi-n beraturan, sudut sektornya $360^o/n$, sudut setengah sektornya $(360^o/n)/2 = 180^o/n$, maka panjang sisi segi-n = AB = $2 \sin (180^o/n)$.

12. Grafik peluncuran roket.



UNIT 4: Identitas Trigonometri

Latihan 1

1. a. Fungsi cosinus periode 2π ➔ $\cos(4\pi + x) = \cos(x + 2\pi + 2\pi) = \cos x$
   b. Fungsi sinus periode 2π ➔ $\sin(3\pi + x) = \sin(x + 2\pi + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$
   c. $\cos(-\pi - x) = \cos -(\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
   d. $\sin(-\pi - x) = \sin -(\pi + x) = -\sin(\pi + x) = \sin x$
2. a. $\sin\phi = t$ ➔ $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ ➔ $\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi = 1 - t^2 = (1 + t)(1 - t)$
   b. $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ ➔ $\cos^2\phi/\cos^2\phi + \sin^2\phi/\cos^2\phi = 1/\cos^2\phi$
   $1 + \tan^2\phi = 1/\cos^2\phi = 1/(1 - \sin^2\phi) = 1/(1 - t^2)$
   $\tan^2\phi = 1/(1 - t^2) - 1$
3. a. Apabila $\sin\phi \cos\phi = ½$, maka $\sin^2\phi - \sin^4\phi = \sin^2\phi(1 - \sin^2\phi) =$
   $\sin^2\phi \cos^2\phi = (\sin\phi \cos\phi)^2 = (½)^2 = ¼$
   b. $\sin^2\phi - \sin^4\phi = ¼$ ➔ $t - t^2 = ¼$
   c. Dari persamaan $t - t^2 = ¼$, diperoleh $t^2 - t + ¼ = 0$
   $(t - ½)^2 = 0$ ➔ $t = ½$ ➔ $\sin^2\phi = ½$ ➔ $\sin\phi = 1/\sqrt{2}$
4. a. Misalkan $\cos\phi = t$ ➔ $6t^2 + t - 1 = 0$ ➔ $(6t - 1)(t + 1) = 0$
   $t = 1/6$ atau $t = -1$ ➔ $\cos\phi = 1/6$ atau $\cos\phi = -1$
   $\phi = 1.40335$ atau $\phi = \pi$
   b. Misalkan $\sin\phi = t$ ➔ $-5t^2 + t + 1 = 0$
   Diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-5)(1) = 21$
   $t = (-b \pm \sqrt{D})/(2a) = (-1 \pm \sqrt{21})/(-10)$
   $t = -0.35826$ atau $t = 0.55826$

ϕ = $\sin^{-1}(-0.35826)$ atau ϕ = $\sin^{-1}(0.55826)$

ϕ = -0.366403 atau φ = 0.59229

c. Misalkan tan ϕ = t ➔ $t - t^2 + 0.5 = 1$

Diskriminan, D = b^2 – 4ac =1^2 – 4(-1)(0.5) = 3

t = $(-b \pm \sqrt{D})/(2a) = (-1 \pm \sqrt{3})/(-2)$

t = -0.366025 atau t = 1.366025

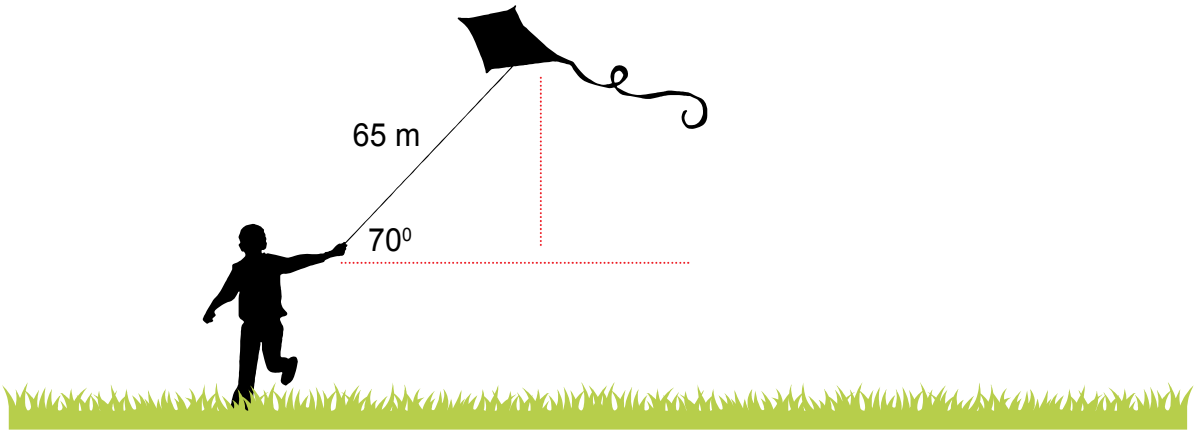
ϕ = $\tan^{-1}(-0.366025)$ atau ϕ = $\tan^{-1}(1.366025)$

ϕ = -0.350879 atau ϕ = 0.93888

UNIT 5: Merancang Model Matematika untuk Menyelesaikan Masalah Trigonometri

Latihan 1

1. a. Sketsa posisi layang-layang, benang dan Riki

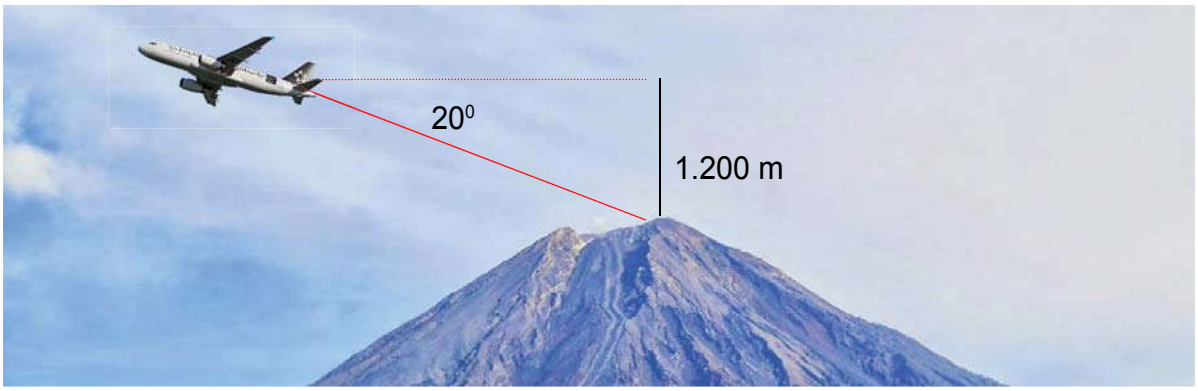


b. Tinggi layang-layang = 65 sin 70^0 = 61.08 m

2. Tinggi tiang bendera = (jarak ke kaki tiang bendera) tan 53^0 = 10 tan 53^0

= 13.27045 m

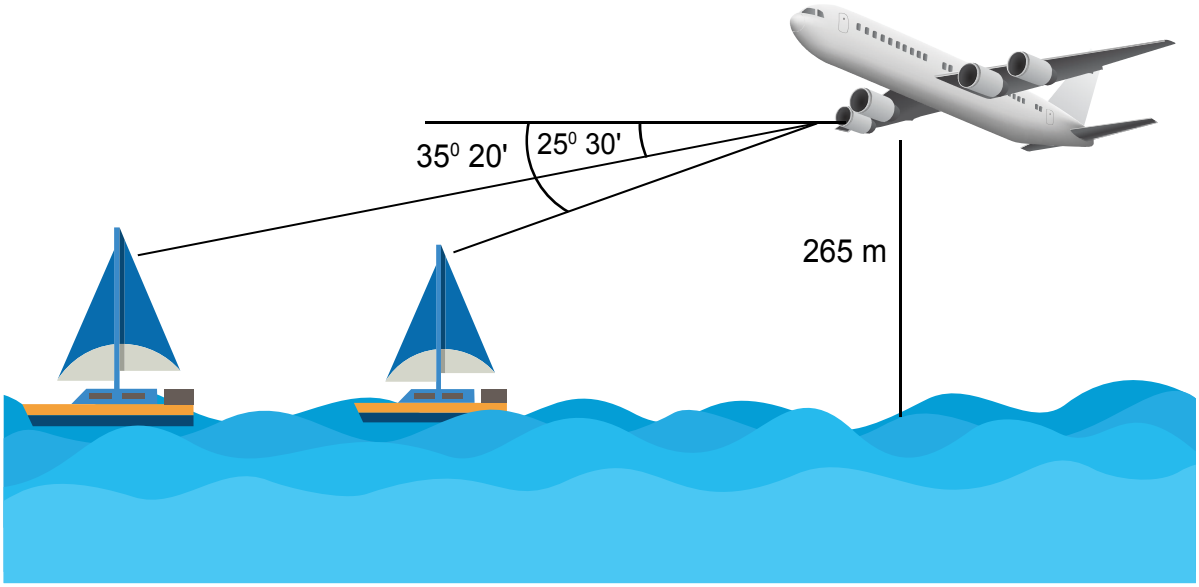
3. a. Sketsa puncak gunung dan pesawat



b. Jarak pesawat ke puncak gunung = (tinggi pesawat dari puncak)/sin 28^0

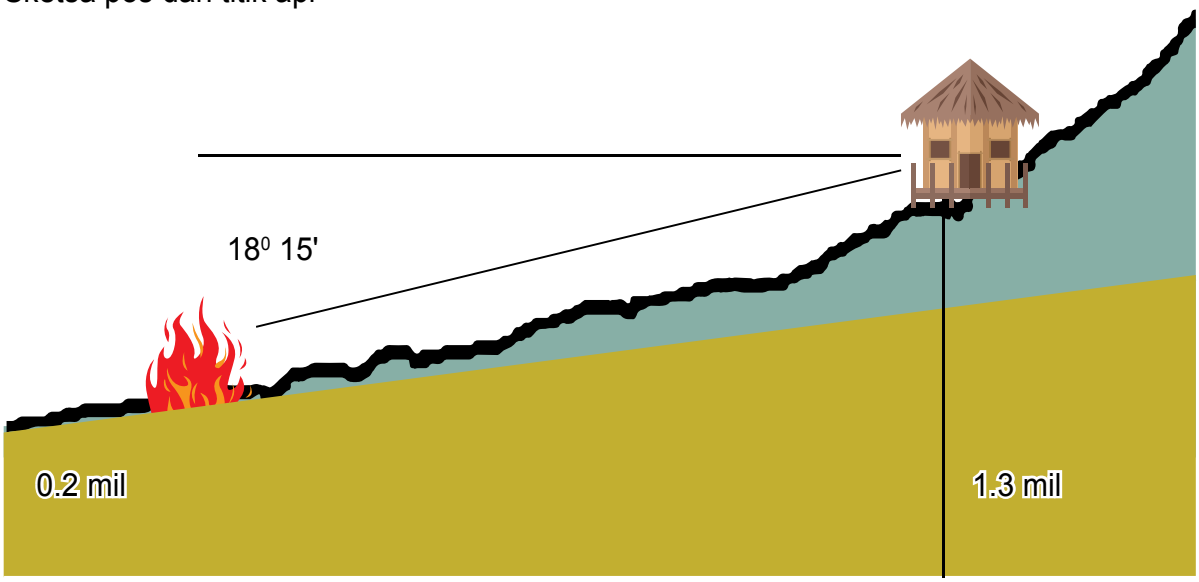
= 1200/sin 28^0 = 2556.0654 m

4. a. Sketsa posisi pesawat dan kapal laut



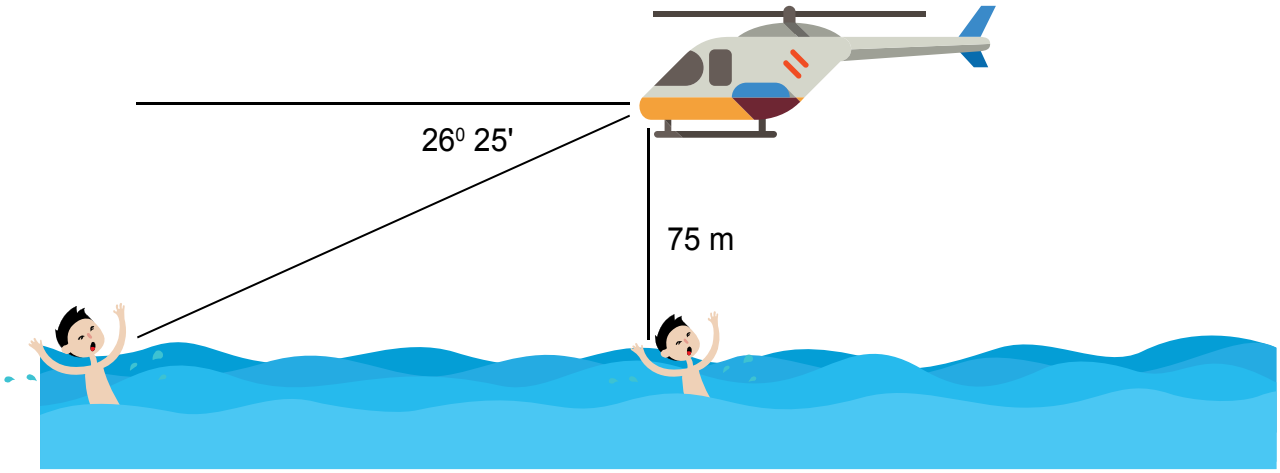
b. Jarak pesawat ke kapal pertama = (tinggi pesawat) tan 35^0 20'
= (265)(0.70891) = 187.862 m
Jarak pesawat ke kapal kedua = (tinggi pesawat) tan 25^0 30'
= (265)(0.47697) = 126.3985 m
Jarak dua kapal laut = 187.862 m - 126.3985 m = 61.4635 m

5. a. Sketsa pos dan titik api



b. Jarak titik api ke pos = (selisih ketinggian pos dan titik api)/sin$18^0$15'
= (1.3 – 0.2)/0.3131638 = 3.51254 mil

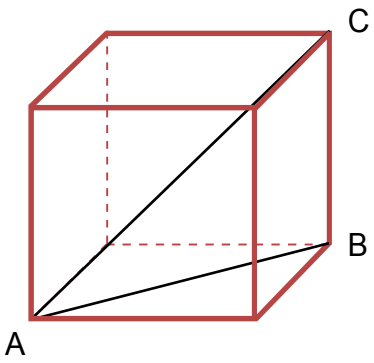
6. Sketsa penyelamatan penumpang



Jarak antar orang berpelampung = (tinggi helikopter)/tan $26^0 25'$

= 75/0.496767 = 150.9762 m

7. a. Sketsa kubus dan segitiga ABC



b. Misalkan rusuk kubus x. Panjang AB = $x\sqrt{2}$. Panjang AC = $x\sqrt{2}$. Jadi, tan $\angle ACB$ = AB/BC = $x\sqrt{2}/x = \sqrt{2}$

$\angle ACB = \tan^{-1}(\sqrt{2}) = 54.73561^o$

$\angle BAC = 180^o - 90^o - 54.73561^o = 35.26439^o$

UNIT 6: Aturan Sinus dan Cosinus

Latihan 1

1. a. Sudut R = $180^o - 42^o - 70^o = 68^o$

b. Menurut aturan sinus, PQ/sin R = PR/sin Q

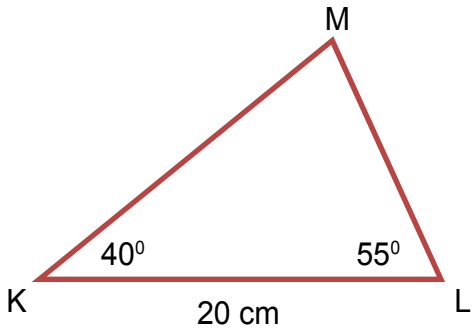
PQ = (PR)sin R/sin Q

= 10 sin 68^o/sin 70^o = 9.8669 cm

QR = (PR)sin P/sin Q

= 10 sin 42^o/sin 70^o = 7.12074 cm

2. Sketsa segitiga KLM



a. Sudut M = $180^o - 40^o - 55^o = 85^o$

b. Menurut aturan sinus, KM/sin L = KL/sin M

KM = (KL)sin L/sin M

= 20 sin 55^o/sin 85^o = 16.4456 cm

LM = (KL)sin K/sin M

= 20 sin 40^o/sin 85^o = 12.90486 cm

3. a. Menurut aturan sinus, luas segitiga ABC = ½ bc sin A

= ½ (AC) (AB) sin A

= ½ (15) (18) sin 40^0 = 86.7763 cm^2

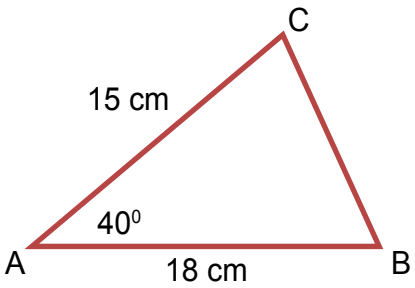
b. Tinggi segitiga dari C = AB sin A = 18sin 40^0 = 11.5702 cm

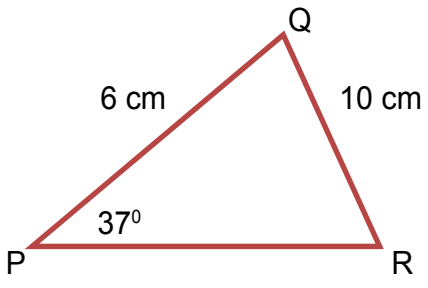
c. Menurut aturan cosinus, $BC^2 = AC^2 + AB^2 – 2AC\ AB \cos A$

$BC^2 = 15^2 + 18^2 – 2(15)(18)\cos 40^0$

= 135.336

BC = $\sqrt{135.336}$ = 11.334 cm





5. Menurut aturan sinus, PQ/sin R = QR/sin P

sin R = PQ sin P/QR

= 6sin 37^o/10 = 0.361089

Sudut R = $\sin^{-1}$ (0.361089) = 21.16709^o

Sudut Q = $180^0 - 37^0 – 21.16709^0$

= 121.83291^0

Menurut aturan cosinus, PR^2 $= PQ^2 + QR^2 - 2PQ\ QR \cos Q$

$= 6^2 + 10^2 - 2(6)(10) \cos (121.83291^0)$

$= 199.29326$

$PR = \sqrt{199.29326} = 14.11713$ cm

UNIT 7: Cosinus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

UNIT 8: Sinus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Latihan 1

6. a. $\cos (2a + d)$ $= \cos 2a \cos d - \sin 2a \sin d$

$= \cos^2 a \cos d - (2\sin a \cos a) \sin d$

$= \cos a (\cos a \cos d - 2\sin a \sin d)$

b. $\cos (3a - 2d)$ $= \cos 3a \cos (-2d) - \sin 3a \sin (-2d)$

$= \cos 3a \cos 2d + \sin 3a \sin 2d$

c. $\sin (x^o + y^o)$ $= \sin x^o \cos y^o + \cos x^o \sin y^o$

d. $\sin \left(\frac{a - b}{2}\right)$ $= \sin ½a \cos ½b - \cos ½a \sin ½b$

e. $\tan (p^o + 2q^o)$ $= (\tan p^o + \tan 2q^o)/(1 - \tan p^o \tan 2q^o)$

f. $\tan \left(\frac{s}{3} - \frac{t}{2}\right)$ $= [\tan (s/3) - \tan (t/2)]/[1 + \tan (s/3) \tan (t/2)\ ]$

2. $\sin \alpha = 4/5$, $\sin\beta\ 5/13$ $= \rightarrow \cos \alpha = 3/5$ dan $\cos \beta = 12/13$

$\rightarrow \tan \alpha = 4/3$ dan $\tan \beta = 5/12$

a. $\cos (\alpha + \beta)$ $= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = (3/5\ )(12/13) - (4/5)(5/13)$

$= 16/65$

b. $\cos (\alpha - \beta)$ $= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = (3/5\ )(12/13) + (4/5)(5/13)$

$= 56/65$

c. $\sin (\alpha + \beta)$ $= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = (4/5\ )(12/13) + (3/5)(5/13)$

$= 63/65$

d. $\sin (\alpha - \beta)$ $= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = (4/5\ )(12/13) - (3/5)(5/13)$

$= 33/65$

e. $\tan (\alpha + \beta)$ $= (4/3 + 5/12)/[1- (4/3)\ (5/12)]$

$= 3\ 15/16$

f. $\tan (\alpha - \beta)$ $= (4/3 - 5/12)/[1+ (4/3)\ (5/12)]$

$= 33/56$

3. a. Misalkan $2a - c$ $= x$ dan $a - 2c = y$, maka $\cos (2a-c).\cos (a-2c) - \sin (2a-c).\cos(a-2c)$

$= (½) 2\cos x \cos y - (½) 2\sin x \cos y$

$= ½ [\cos (x+y) + \cos(x-y)] - ½ [\sin (x+y) + \sin(x-y)]$

= ½ [cos 1/3(a-c) +cos(a+c)] – ½ [sin 1/3(a-c) +sin(a+c)]

b. Misalkan 2x – y = a dan x – 2y = b, maka
sin (2x-y).cos(x-2y) – cos (2x-y).sin(x-2y) = sin a cos b – cos a sin b
= sin (a + b)
= sin (2x - y + x – 2y)
= sin (3x - 3y) = sin 3(x - y)

4. a. sin 105^0 = sin $(90 + 15)^0$ = sin 90^0cos 15^0 + cos 90^0sin 15^0
= cos 15^0 = cos $(45 – 30)^0$
= cos 45^0 cos 30^0 + sin 45^0 sin 30^0
= $(1/\sqrt{2})(\sqrt{3}/2) + (1/\sqrt{2})(1/2) = ¼\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

a. tan 105^o = -cot 15^0 = -3.732051

b. cos 105^o = sin 15^0 = -0.258819

5. a. sin 120^0 = cos 30^0 =0.866025

a. cos 150^0 = -cos 30^0 =-0.866025

b. tan 135^0 = -tan 45^0 =-1

6. a. sin $(90^0 - \alpha)$ = cos α dan
sin $(90^0 + \alpha)$ = sin 90^0cos α+ cos 90^0sin α = cos α
Jadi, sin $(90^0 - \alpha)$ = sin $(90^0 + \alpha)$

b. cos $(90^0 – \alpha)$ = sin α dan
-cos $(90^0 + \alpha)$ = -[cos 90^0cos α- sin 90^0sin α] = sin α
Jadi, cos $(90^0 - \alpha)$ = -cos $(90^0 + \alpha)$

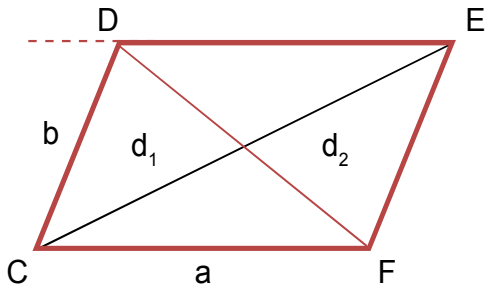
5. a. sin a = cos b, maka jumlah sudut a dan b adalah 90^0.
Jadi sin (a + b) = sin 90^0 = 1

b. tan a = tan b, maka a = b ➔ a – b = 0 ➔ tan (a – b) = tan 0 = 0

UNIT 9: Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

Latihan 1

1. Perhatikan diagram jajar genjang berikut



Harus ditunjukkan $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Menurut aturan cosinus

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos F = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^o - C)$

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

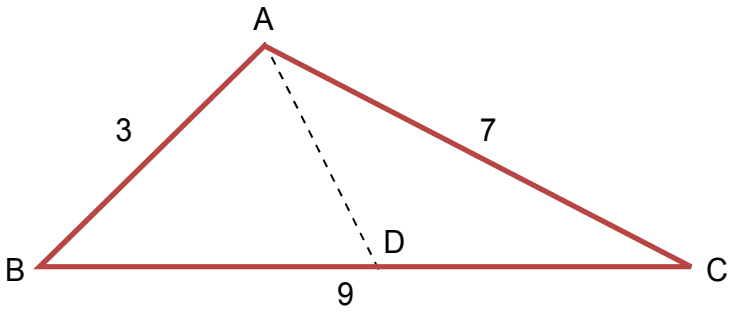
Kedua persamaan dijumlahkan

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) - 2ab [\cos (180^o - C) + \cos C]$

$= 2(a^2 + b^2) - 2ab [\cos 180^o \cos (-C) - \sin 180^o \sin (-C) + \cos C]$

$= 2(a^2 + b^2) - 2ab [-\cos C - 0 + \cos C] = 2(a^2 + b^2)$

2. a. Sketsa segitiga ABC



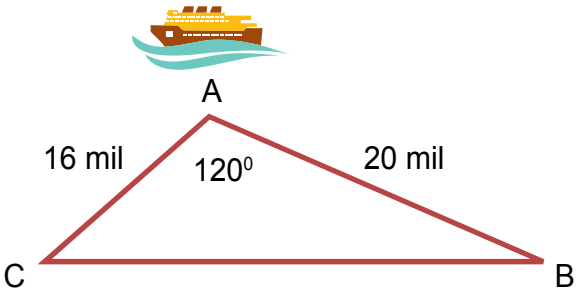
b. Panjang garis berat dihitung dengan rumus berikut.

AD = 1/2 = ½ (√[(2)(7)^2 + (2)(3)^2 - (9)^2]

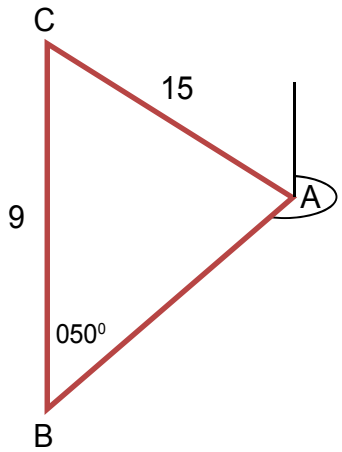
= 2.95804

3. Menggunakan aturan cosinus, $BC^2 = 16^2 + 28^2 - 2(16)(28)\cos 120^o$

$BC^2 = 1488$ ➔ Jarak kedua lampu = $\sqrt{1488} = 38.5746$ mil



4. a. Gambar posisi A, B dan C. Jarak AC = 15.0 mil dan CB = 9.0 mil



b. Menurut aturan sinus, sin A = BC sin B/AC = 9 sin 50°/15 = 0.45963

sudut A = 27.36302° ➔ sudut C = 180° - 50° - 27.36302°

= 102.63698°

Jurusan tiga angka dari A ke B = 360° – sudut CAB – sudut BCA

= 360° – 27.36302° – 102.63698°

= 230°

5. cos A + sin A tan A = cos A + sin A sin A/cos A

= (cos² A + sin² A)/cos A = 1/cos A = sec A

6. a. sin B cot B = sin B cos B/sin B = cos B

b. $\frac{1 + \cos C}{\cos C}$ = 1/cos C + cos C/cos C = sec C + 1

c. $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} \quad \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A}$ = (1 – cos² A)/[sin A (1 – cos A)]

= sin² A/[sin A (1 – cos A)] = sin A/(1 – cos A)

7. $\frac{\cos A}{\sec A + \tan A} = \frac{\cos A}{1/\cos A + \sin A/\cos A} \quad \frac{\cos A}{\cos A}$ = cos² A/(1 + sin A)

= (1 - sin² A)/(1 + sin A) = 1 – sin A

8. Bentuk matematika sudah dinyatakan dalam tan A

9. a. sin 15⁰ = sin (45⁰ - 30⁰) = ¼√2(√3 – 1)

b. cos $\frac{5\pi}{12}$ = sin 75⁰ = sin (60⁰ + 15⁰) = (½√3)(¼√2(√3 + 1) + ½ ¼√2(√3 – 1)

= 1/8√6(√3 + 1) + 1/8√2(√3 – 1)

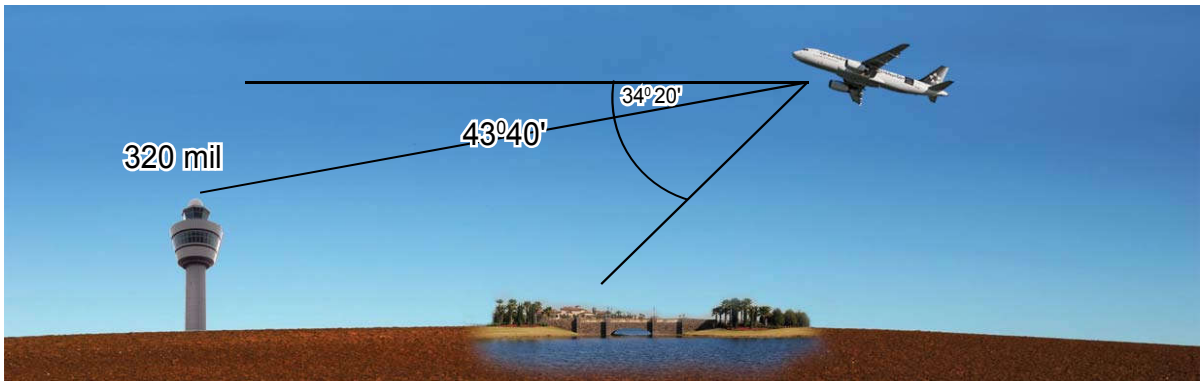
c. tan 105⁰ = - tan 75⁰

10. sin A = -1/3 ➔ sudut A = 199.47122⁰ dan

cos B = 1/5 ➔ sudut B = 281.53696⁰

cos (A – B) = cos -82.06574⁰ = 0.1380368

11. a. Diagram posisi pesawat, bandara dan danau



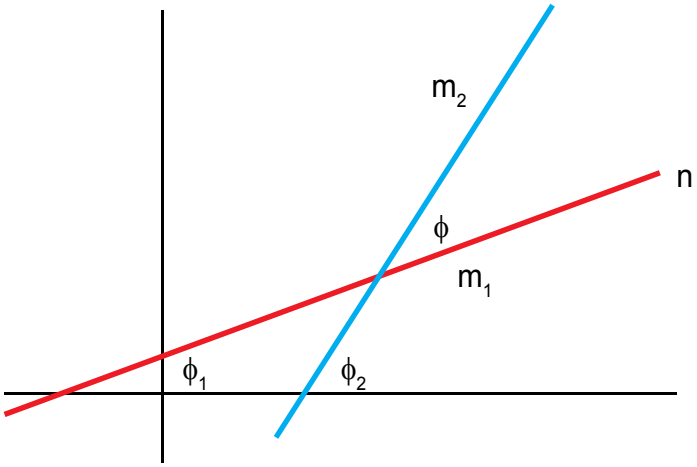
b. Dengan aturan sinus,

(jarak danau bandara)/sin ($43^0 40' - 34^0 20'$) = 320/sin ($180^0 - 43^0 40'$)

jarak danau bandara = 320 sin ($43^0 40' - 34^0 20'$)/sin ($180^0 - 43^0 40'$)

= 75.162657 mil

12. Grafik garis n dan p sebagai berikut.



Sudut $\phi = 180^o - \phi_1 - (180^o - \phi_2) = \phi_2 - \phi_1$

$\tan \phi = \tan(\phi_2 - \phi_1) = (\tan\phi_2 - \tan\phi_1)/(1 + \tan\phi_2 \tan\phi_1)$

$= (m_2 - m_1)/(1 + m_2 m \phi_1)$

13. a. $\sin 120^0 = \sin 2(60^0) = 2 \sin 60^0 \cos 60^0 = 2(\sqrt{3}/2)(1/2) = ½\sqrt{3}$

b. $\tan 120^0 = \tan 2(60^0) = 2 \tan 60^0 /(1 - \tan^2 60^0) = 2(\sqrt{3})/(1 - 3) = -\sqrt{3}$

14. sin B = 3/5 ➔ sudut B = 143.1301°

a. sin 2B = sin 2(143.1301°) = -0.96

b. cos 2B = cos 2(143.1301°) = 0.28

15. a. $\sin y = 2 \sin(y/2) \cos(y/2) = 2 \sin(y/2) \sqrt{(1-\sin^2(y/2))}$

$(-24/25)^2 = 4 \sin^2(y/2)[1 - \sin^2(y/2)] = 4 \sin^2(y/2) - 4\sin^4(y/2)$

Misalkan $\sin^2(y/2) = t$ ➔ $(-24/25)^2 = 4t - 4t^2$

➔ $4t^2 - 4t + (-24/25)^2 = 0$

Diskriminan D = b^2 – 4ac = (-4)^2 – 4(4)$(24/25)^2$ = 1.2544

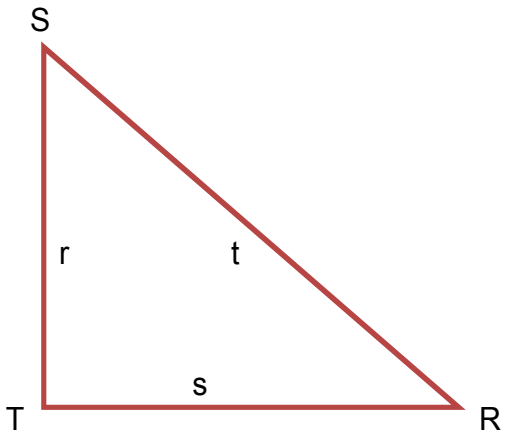
Jadi, $t = (4 + \sqrt{1.2544})/(2*4) = 0.64$ atau $t = (4 - \sqrt{1.2544})/(2*4) = 0.36$

$\sin(y/2) = 0.8$ atau $\sin(y/2) = 0.6$

b. $\cos(y/2) = \sin y/[2 \sin(y/2)] = (-24/25)/[2(0.8)] = -0.6$

atau $\cos(y/2) = \sin y/[2 \sin(y/2)] = (-24/25)/[2(0.6)] = -0.8$

16. a. Sketsa segitiga RST



b. sin R = r/t dan cos R = s/t

➔ sin 2R = 2sin R cos R = $2(r/t)(s/t) = 2rs/t^2$

➔ cos 2R = $\cos^2 R - \sin^2 R = (s/t)^2 - (r/t)^2 = (s^2 - r^2)/t^2$

17. a. sin (A + B) + sin (A – B) = 2 sin A cos B

b. cos (A + B) + cos (A – B) = -2 sin A sin B

18. a. $\sin 45^0 + \sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

b. $\cos 45^0 + \cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas IV SD, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990